

Menentukan Determinan Matriks Persegi Panjang Menggunakan Bahasa C++

Diego Armando Piero^{#1}, Dewi Murni^{*2}

[#]Student of Mathematics Departement Universitas Negeri Padang, Indonesia

^{*}Lecturer of Mathematics Departement Universitas Negeri Padang, Indonesia

¹d24.piero@gmail.com

²dewimurni_mat@fmipa.unp.ac.id

Abstract — One study in matrix theory is determinant. Matrix determinants are widely used in solving matrix problems, such as: determining eigenvalues, systems solutions of linear and inverse equations. In determining a determinant of a square matrix is usually not easy especially with a large order matrix. The concept of determinant that has been known is generally true for square matrices. In this research, it will be studied about its development, which is about the determinant of non-square matrix (rectangular matrix). This research is a theoretical research through library research on determinant theories and programming theories. The purpose of this research is to determine the determinant of a rectangular matrix using C ++ language. The method used is the analysis of theories relevant to the problem of calculating rectangular matrix determinants using the C ++ language. The results of the study are produced programs that can determine the determinant of a rectangular matrix.

Keywords — determinant, matrix, radic method, programming.

Abstrak — Salah satu kajian dalam teori matriks adalah determinan. Determinan matriks banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah - masalah tentang matriks, seperti : menentukan nilai eigen, solusi sistem persamaan linear dan invers. Dalam menentukan suatu determinan dari matriks persegi biasanya tidak mudah apalagi dengan matriks ordo yang besar. Konsep determinan yang selama ini dikenal pada umumnya berlaku untuk matriks persegi. Pada penelitian akan dikaji tentang pengembangannya yaitu tentang determinan matriks non persegi (matriks persegi panjang). Penelitian ini merupakan penelitian teoritis melalui studi kepustakaan tentang teori – teori determinan dan teori pemograman. Tujuan dari penelitian untuk menentukan determinan matriks persegi panjang menggunakan bahasa C++. Metode yang digunakan adalah analisis teori – teori yang relevan dengan permasalahan perhitungan determinan matriks persegi panjang menggunakan bahasa C++. Hasil dari penelitian adalah dihasilkan program yang dapat menentukan determinan matriks persegi panjang.

Kata kunci — determinan, matriks, metode radic, pemograman.

PENDAHULUAN

Determinan matriks merupakan salah satu perkembangan lebih lanjut dari cabang matematika yaitu aljabar yang terjadi pada abad ke – 16. Determinan adalah suatu fungsi khusus yang mengasosiasikan suatu bilangan real dengan suatu matriks bujursangkar [1]. Determinan matriks banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah - masalah tentang matriks, seperti : menentukan nilai eigen, solusi sistem persamaan linear dan invers. Secara simbolis menurut [1] jika diketahui matriks A persegi maka determinan A ditulis sebagai

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

di mana \sum menunjukkan bahwa suku – suku harus dijumlahkan untuk semua permutasi (j_1, j_2, \dots, j_n) dan tanda (+) atau (-) dipilih untuk setiap suku tergantung pada apakah permutasinya genap atau ganjil. Referensi

[2] memaparkan misalnya diberikan matriks A berukuran 3×3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Maka

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1)$$

Sebagai pengingat ketentuan diatas diperoleh dari

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Dalam menentukan suatu determinan dari matriks persegi biasanya tidak mudah apalagi dengan matriks

ordo yang besar. Banyak pendekatan yang dapat digunakan menentukan suatu determinan dari matriks persegi diantaranya dengan definisi, reduksi baris, ekspansi kofaktor. Namun dalam banyak referensi pembahasan determinan matriks masih banyak yang terfokus pada matriks persegi saja.

Konsep determinan yang selama ini dikenal pada umumnya berlaku untuk matriks persegi kini telah dikembangkan konsep tentang determinan pada matriks persegi panjang. Dalam penelitian ini akan dikaji tentang determinan matriks persegi panjang sebagai perluasan dari definisi formal determinan. Untuk matriks persegi diketahui bahwa tidak mudah menentukannya jika ordonya besar. Apalagi untuk matriks persegi panjang yang ordonya lebih besar dari matriks persegi jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama. Dalam penentuan determinan untuk matriks yang berordo lebih besar tersebut secara manual akan memerlukan analisis dan perhitungan yang panjang sehingga memerlukan waktu yang cukup lama untuk menyelesaikannya.

Penelitian ini berdasarkan definisi Radić yaitu

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} (-1)^{r+s} |a_{j_1}, \dots, a_{j_m}| \quad (2)$$

Dimana $r = 1 + \dots + m, s = j_1 + \dots + j_m$ [3]. Dalam hal ini jika matriks yang dihitung itu adalah matriks berordo $3 \times n$ maka akan dihitung determinan sub matriks perseginya sebanyak ${}_n C_3$. Misalnya jika akan dihitung determinan matriks dengan ordo 3×5 maka akan dihitung determinan sub matriks persegi ordo 3×3 sebanyak 10 matriks. Tentu ini akan membuat proses penentuan determinan matriks menjadi lama. Oleh sebab itu maka dibuat sebuah program yang dapat membantu menghitung determinan matriks persegi panjang dengan lebih cepat.

Di zaman sekarang ilmu dan teknologi sudah berkembang. Untuk mencari sesuatu bisa digunakan perpaduan antara ilmu algoritma dan memakai alat bantu bahasa pemrograman. Program komputer merupakan sebuah instruksi yang digunakan oleh computer untuk memecahkan masalah atau tugas-tugas yang diberikan padanya [4]. Referensi [5] memperlihatkan tahap-tahap yang harus ditempuh pada saat akan melakukan pemrograman adalah :

- 1) Membuat Algoritma dan Flowchart
- 2) Menuliskan program dengan menggunakan bahasa pemrograman
- 3) Menguji kebenaran program
- 4) Menjalankan program

Bahasa C++ merupakan salah satu bahasa pemrograman yang sangat populer di dalam dunia computer [6]. Terutama di kalangan para peneliti maupun di dunia pendidikan. Hal ini dikarenakan bahasa C++ dianggap sebagai bahasa yang memiliki banyak keunggulan dibanding bahasa yang lain. Dilihat dari sisi sintaks-nya, bahasa C++ sangat mudah dipelajari baik bagi kalangan pelajar/mahasiswa maupun kalangan masyarakat umum. Perintah-perintah yang digunakan mudah diingat dan dipahami karena merepresentasikan bahasa manusia (bahasa tingkat tinggi). Selain itu, dalam

proses running-nya (eksekusi), bahasa C++ memiliki mempunyai kecepatan yang sangat tinggi. Dengan keunggulannya tersebut, bahasa C++ sangat sering sekali dipakai untuk mata kuliah dasar di perguruan tinggi. Dengan perpaduan ilmu algoritma dan bahasa pemrograman C++, pencarian determinan matriks bisa menjadi sangat cepat tetapi juga akurat. Berdasarkan teori yang dikemukakan Radić maka akan dibuat program untuk menghitung determinan matriks persegi panjang.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian dasar/teoritis. Metode yang digunakan adalah analisis teori – teori yang relevan dengan permasalahan perhitungan determinan matriks persegi panjang menggunakan bahasa C++ dengan berlandaskan kajian kepustakaan. Dalam penelitian ini, dimulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan bahan bacaan yang menjadi rujukan, mengaitkan teori-teori yang diperoleh dari bahan bacaan yang berkaitan dengan permasalahan yang dibahas sehingga dapat menjawab pertanyaan yang muncul dari permasalahan, dan menarik kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas.

Berikut langkah-langkah yang dilakukan:

1. Menelaah teori menghitung determinan berdasarkan Radić;
2. Membuat Algoritma dan Flowchart determinan matriks persegi panjang;
3. Menuliskan program menentukan determinan matriks persegi panjang dengan menggunakan bahasa pemrograman;
4. Menguji kebenaran program menentukan determinan matriks persegi panjang;
5. Menjalankan program menentukan determinan matriks persegi panjang;

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Determinan Matriks Persegi Panjang

Dalam definisi berikut dari determinan matriks persegi panjang diberikan : determinan matriks $A_{m \times n}$ dengan kolom A_1, \dots, A_n dan $m \leq n$ adalah jumlah

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} (-1)^{r+s} |a_{j_1}, \dots, a_{j_m}| \quad (2)$$

Dimana $r = 1 + \dots + m, s = j_1 + \dots + j_m$ dan $|a_{j_1}, \dots, a_{j_m}|$ merupakan matriks persegi berordo $m \times m$ [3].

Dengan menggunakan definisi (2) jika matriks berukuran $m \times n$ dengan $m = 3$ maka determinannya adalah

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \leq i < \\ j < k \leq n}} (-1)^{(1+2+3)+(i+j+k)} \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \quad (3)$$

Dengan menggunakan definisi (3) khususnya untuk matriks ordo 3×5 maka :

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(1+2+5)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(1+3+5)} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 \\ c_1 & c_3 & c_5 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(1+4+5)} \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(2+3+5)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_5 \\ b_2 & b_3 & b_5 \\ c_2 & c_3 & c_5 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(2+4+5)} \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_5 \\ b_2 & b_4 & b_5 \\ c_2 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{(1+2+3)+(3+4+5)} \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\
 &- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 \\ c_1 & c_3 & c_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \\
 &- \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_5 \\ b_2 & b_3 & b_5 \\ c_2 & c_3 & c_5 \end{vmatrix} \\
 &- \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_5 \\ b_2 & b_4 & b_5 \\ c_2 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Seperti matriks ordo 3×5 diatas maka ada ${}_5C_3 = 10$ sub matriks persegi ordo 3×3 yang akan dihitung determinannya. Jadi untuk menentukan determinan $3 \times n$, maka ada ${}_nC_3$ sub matriks persegi ordo 3×3 yang akan dihitung determinannya.

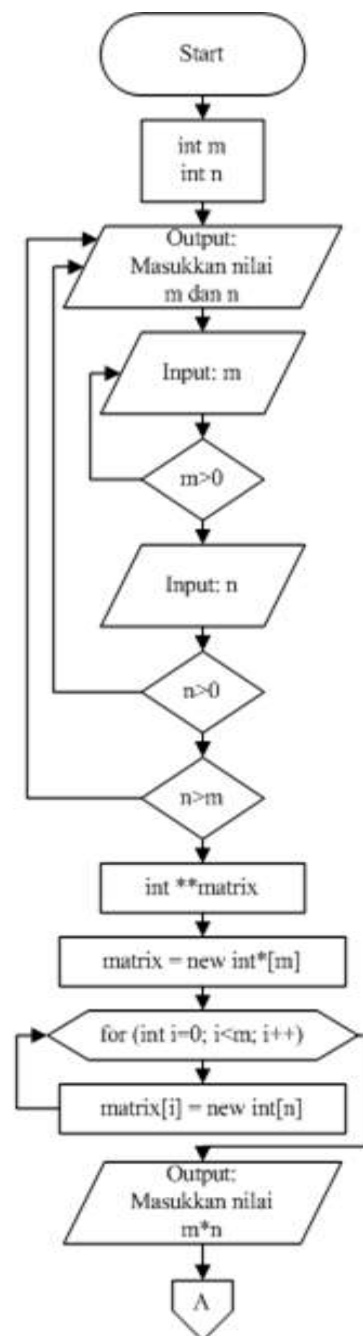
Dapat dilihat bahwa menentukan determinan matriks persegi panjang dengan cara manual diatas memerlukan waktu yang cukup lama. Apalagi untuk matriks persegi panjang yang memiliki jumlah baris dan kolom yang lebih dikerjakan secara manual akan memerlukan analisis dan perhitungan yang panjang sehingga memerlukan waktu yang lebih lama lagi untuk menyelesaikannya.

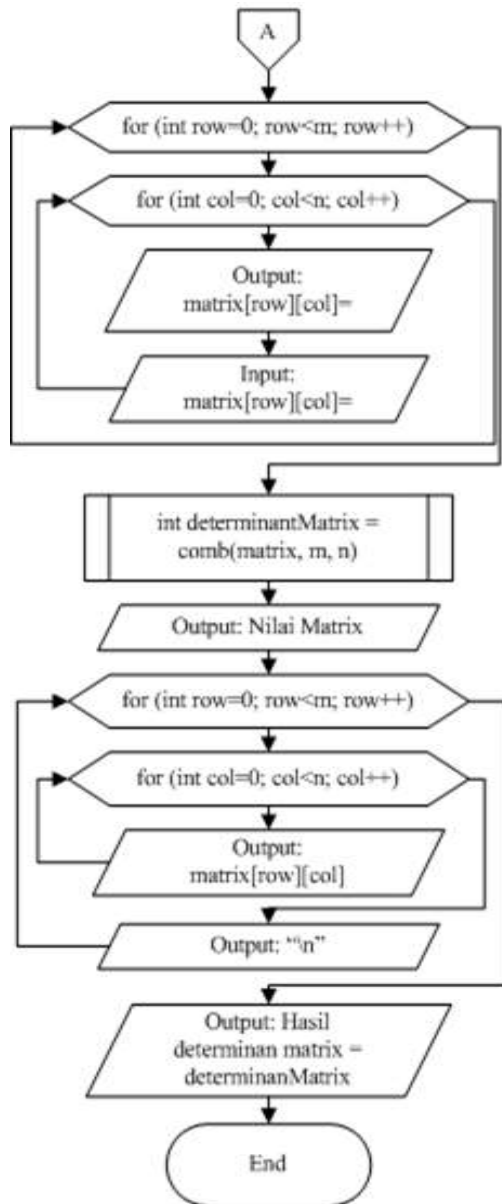
B. Proses Program

Untuk mempermudah perhitungan determinan matriks persegi panjang diatas maka berikut akan dibuat program dengan bahasa C++. Di bagian ini akan dibahas flowchart determinan matriks persegi panjang dengan menggunakan bahasa pemrograman C++ :

1) Fungsi Main

Fungsi utama yang dijalankan oleh program. Di dalamnya terdapat proses input ordo matriks (m dan n), input entri - entri matriks, pemanggilan fungsi determinan (comb) serta menampilkan matriks dan hasil nilai determinan nya.





Gambar. 1 Flowchart Fungsi Main Determinan Matriks Persegi Panjang

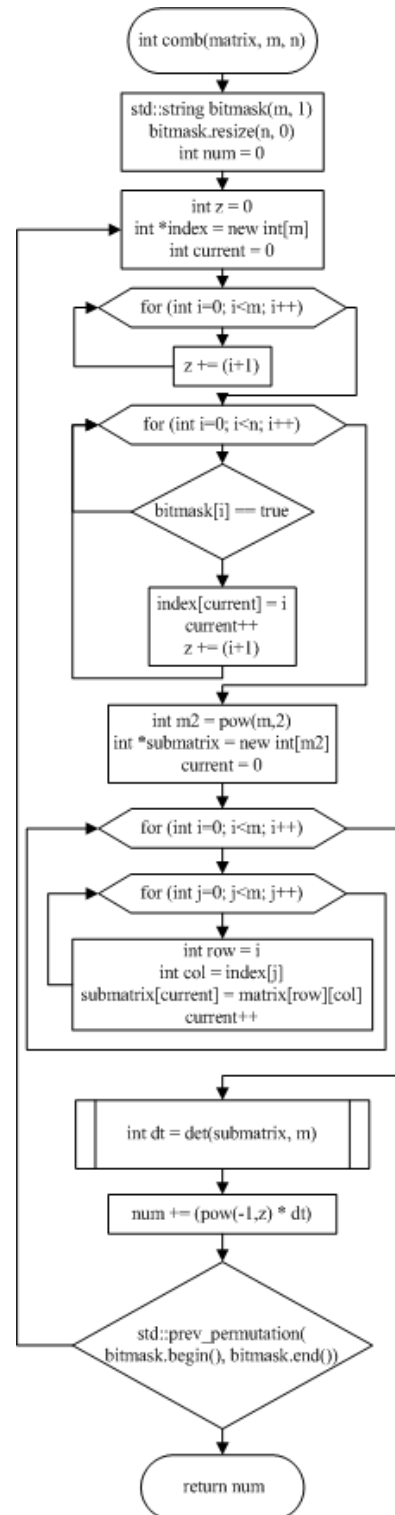
2) Fungsi Comb

Fungsi yang digunakan untuk mendapatkan sub matrix persegi ordo $m \times m$ dengan mencari permutasi dari nilai n dalam ordo $m \times n$. Untuk kemudahan proses, hasil sub matrix persegi disimpan dalam array 1 dimensi, contoh untuk matrix 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

disimpan menjadi array

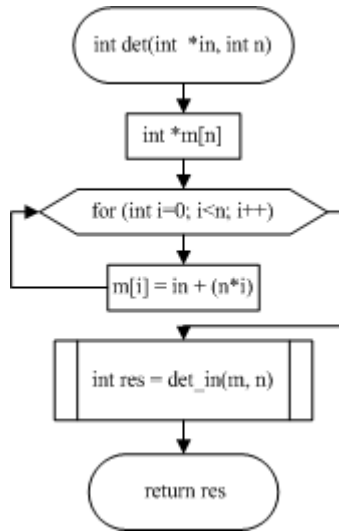
$$(6 \ 5 \ 1 \ -3)$$



Gambar. 2 Flowchart Fungsi Comb Determinan Matriks Persegi Panjang

3) Fungsi Det

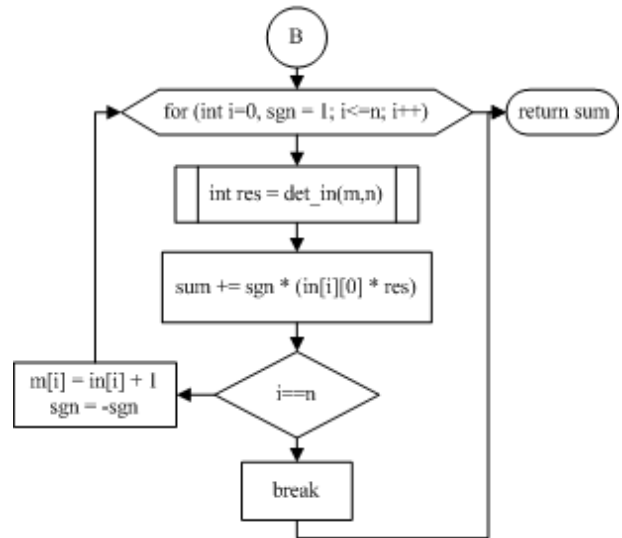
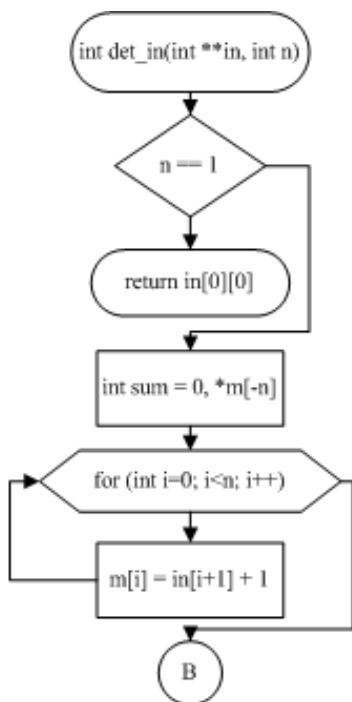
Fungsi ini memiliki peran memisahkan array 1 dimensi menjadi array 2 dimensi yang merepresentasikan matrix ordo $m \times m$.



Gambar. 3 Flowchart Fungsi Det Determinan Matriks Persegi Panjang

4) Fungsi Det_in

Fungsi yang memiliki peran untuk menghitung nilai determinan dari sub matrix persegi ordo $m \times m$.



Gambar. 4 Flowchart Fungsi Det_in Determinan Matriks Persegi Panjang

C. Proses Program

Berdasarkan hasil pembuatan aplikasi program yang telah dibahas pada sebelumnya, untuk mendapatkan hasil maksimal penelitian ini dibatasi pada beberapa kriteria dasar yaitu:

- 1) Besar kecilnya program hasil kompilasi, program yang dibuat dengan bahasa pemrograman tertentu akan dikompilasi menjadi kode-kode yang dapat dimengerti oleh mesin. Besar-kecilnya ukuran program dapat menentukan baik-tidaknya program menyangkut efisiensi penggunaan memori
- 2) Kecepatan program, program dapat dikatakan baik apabila dapat mengeksekusi instruksi-instruksi yang diberikan secara cepat.

Hasil eksekusi kode program determinan matriks persegi panjang pada bahasa C++ dengan menggunakan contoh soal sebelumnya yaitu :



Gambar. 5 Output Aplikasi Determinan Matriks Persegi Panjang Menggunakan Bahasa C++ Dari Contoh Soal Sebelumnya

Pada program determinan matriks persegi panjang berordo $m \times n$, nilai baris dan kolom matriks akan di masukkan melalui keyboard yang kemudian akan diperiksa oleh program jika memenuhi syarat bahwa nilai $m > 0$ dan $n \geq m$ maka pengisian entri-entri matriks dilakukan. Kemudian program akan menampilkan bentuk matriks yang akan di hitung determinannya sekaligus menampilkan determinannya.

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, diperoleh Untuk menentukan determinan matriks persegi panjang menggunakan bahasa C++ diperlukan informasi ordo matriks dan entri-entri nilai dari matriks tersebut supaya program berjalan lancar. Saat penginputan ordo matriks $m \times n$, diinput nilai m dan n dengan syarat $n \geq m, m > 0$. Jika salah satu atau kedua syarat dilanggar maka program akan mengeluarkan peringatan dan mengulang

kembali penginputan sampai syaratnya terpenuhi. Setelahnya diinput semua entri-entri nilai dari matriks yang akan dicari determinannya. Terakhir setelah semuanya diinput maka akan muncul bentuk determinan yang akan dicari sekaligus dengan hasil determinannya

REFERENSI

- [1] Rorres. Anton. (2004). Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi : Edisi 8 Jilid 1. Jakarta: Erlangga.
- [2] Cullen, Charles. G. (1992). *Aljabar Linier Dengan Penerapannya*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- [3] Radić M. *A Definition of Determinant of Rectangular Matrix*. Glas. Mat. **1**(21) (1996), 17-22.
- [4] Suprpto. (2008). *Bahasa Pemrograman*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.
- [5] Purwanto, Eko. (2011). *Bahasa Pemrograman Pascal*. Solo: Duta Publishing Indonesia.
- [6] Ramadhani, Cipta. (2019). *Algoritma, Pemrograman dan Struktur Data Menggunakan C++*. Mataram : ANDI