

# SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES BURGERS DENGAN METODE SPEKTRAL

Defri Ahmad

Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang  
email: defriahmad88@gmail.com

## ABSTRACT

*The Burgers Korteweg-de Vries equations have widely applications in fluid mechanics, physics and engineering. By assume that the solutions of the KdVB equation are be able to presented as the sum of some periodic waves, the solutions of the KdVB can be transformed into spectral space. In this paper, the numerical solutions of the KdVB equation by using spectral methods are discussed. By using FFT and IFFT syntax the KdVB equation solved numerically. By using this solution we investigate that if the dissipative coefficient going smaller then the solitary wave will be dispersed.*

**Keywords:** KdV, KdVB, Spectral Method, Solitary Wave

---

## PENDAHULUAN

Persamaan Korteweg-de Vries (KdV) merupakan suatu model tentang gelombang permukaan air pada suatu saluran. Persamaan ini memberikan pergerakan dari suatu gelombang soliter (soliton) (berdasarkan kondisi inisial/ awal) yang merambat di permukaan air pada saluran tersebut. Selain itu, persamaan juga dapat menggambarkan interaksi antar soliton yang diberikan pada kondisi awal.

Persamaan KdV pertama kali diturunkan pada tahun 1895 oleh Korteweg dan de Vries. Persamaan ini digunakan untuk menggambarkan model gelombang air dangkal lemah dan model gelombang air panjang satu arah pada suatu saluran. Selanjutnya, persamaan ini muncul dalam berbagai bidang seperti perambatan gelombang pada nadi, perambatan gelombang pada serat optik dan plasma dan lain sebagainya.

Persamaan KdV terdiri atas tiga suku yaitu suku non linear, suku disipatif dan suku yang memuat turunannya terhadap waktu  $t$ . Secara umum persamaan KdV berbentuk;

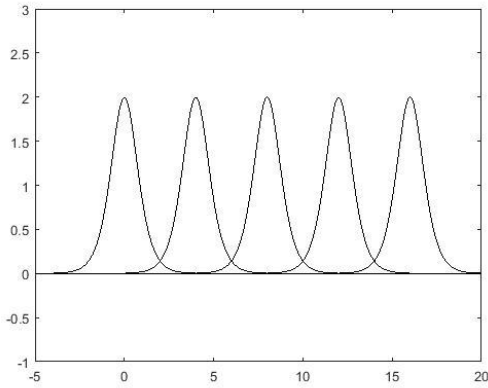
$$u_t + \alpha uu_x + su_{xxx} = 0$$

dengan suku non linear ( $\alpha uu_x$ ) dan suku dispersif  $su_{xxx}$ .

Solusi persamaan KdV telah dibahas dalam berbagai buku maupun jurnal, baik secara analitik maupun secara numerik. Solusi numerik persamaan telah dibahas melalui berbagai metode seperti metode beda hingga, metode spektral, dengan memanfaatkan statistika dan lain sebagainya. Sementara solusi analitik dari persamaan KdV di atas, yang telah ditemukan yaitu;

$$u(x, t) = \frac{2sk^2}{\alpha} \cdot \text{sech}^2(k(x - 4sk^2t))$$

untuk suatu  $k$  dan  $x_0$ . Solusi ini menggambar sebuah soliton yang merambat sepanjang waktu  $t$ . Dan dari solusi ini terlihat bahwa koefisien dispersif memberikan pengaruh terhadap ketinggian dan kecepatan perambatan dari soliton yaitu semakin besar  $s$  maka semakin tinggi dan semakin cepat pula perambatannya.



Gambar 1. Solusi Eksak dari Persamaan KdV pada Waktu  $t = 1s, t = 2s, t = 3s, t = 4s,$  dan  $t = 5s$  untuk  $\alpha = 1$  dan  $s = 1$ .

Salah satu persamaan lainnya yang sering muncul masalah gelombang yaitu persamaan Burgers. Berbeda dengan persamaan KdV yang mempunyai suku dispersif ( $su_{xxx}$ ) yang menggambarkan penyebaran gelombang, persamaan Burgers memuat suku disipatif ( $\beta u_{xx}$ ), yang menggambarkan perubahan energi.

Secara umum persamaan Burgers berbentuk;

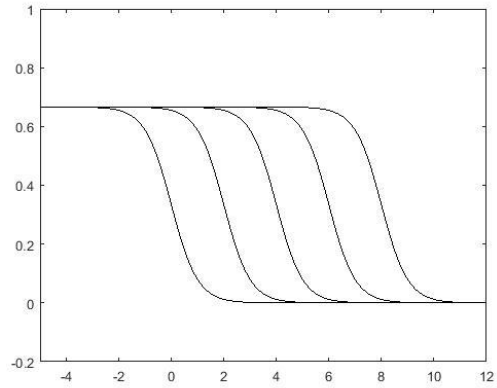
$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xx} = 0$$

Secara analitik solusi dari persamaan ini adalah

$$u(x, t) = \frac{2k}{\alpha} - \frac{2\beta k}{\alpha} \tanh(k(x - 2kt))$$

Berdasarkan solusi ini terlihat bahwa koefisien disipatif  $\beta$  memberikan efek terhadap ketinggian gelombang, tetapi tidak mempengaruhi kecepatan perambatan gelombang. Begitu juga dengan koefisien non linear ( $\alpha$ ) yang hanya berpengaruh terhadap panjang gelombang. Koefisien  $\beta$  juga sering dihubungkan dengan kepekat an/viskositas dari fluida yang diamati/dimodelkan.

Gambar dari solusi eksak persamaan Burgers ini, untuk suatu kasus  $\alpha = 1$  dan  $\beta = -1$ , dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Solusi Eksak dari Persamaan Burgers pada Waktu  $t = 1s, t = 2s, t = 3s, t = 4s,$  dan  $t = 5s$  untuk  $\alpha = 1$  dan  $\beta = -1$ .

Dalam makalah ini, akan dibahas tentang solusi dari persamaan KdV Burgers (KdVB) yang merupakan kombinasi dari persamaan KdV dengan persamaan Burgers. Persamaan KdVB memuat kedua suku, suku dispersif (penyebaran gelombang) dan disipatif (perubahan energi) sehingga persamaan ini dapat menggambarkan masalah yang lebih kompleks.

Persamaan KdVB muncul dalam berbagai konteks fisis yang berhubungan dengan gelombang. Beberapa konteks tersebut yaitu aliran cairan yang memuat gelembung udara seperti aliran air dalam pipa minyak, gelombang plasma yang memuat efek disipatif, perambatan Undular Bores pada air dangkal yang dibahas sebagai salah satu model dari gelombang tsunami, gelombang pada tabung elastis yang berisi cairan kental seperti aliran darah dalam nadi dan turbulensi.

Persamaan KdVB pertama kali diturunkan oleh Su dan Gardner untuk permasalahan aproksimasi sistem persamaan gelombang panjang non linear lemah. Setelah itu, banyak peneliti yang membahas permasalahan yang berhubungan dengan persamaan KdVB. Penelitian yang dilakukan berhubungan dengan solusi analitik dan solusi numerik dari persamaan KdVB.

Solusi analitik persamaan KdVB pertama kali ditemukan oleh Xiong (1989).

Selanjutnya pada tahun yang sama Jeffrey dan Xu menemukan hasil yang sama yaitu dengan mereduksi persamaan KdVB ke dalam bentuk bilinear. Saat ini telah banyak literature yang membahas persamaan KdVB, salah satunya pada metode ekspansi persamaan Riccati yang disajikan untuk membangun solusi eksak dari persamaan gelombang non linear, telah menemukan solusi eksak dari persamaan KdVB sewaktu menyelesaikan persamaan gelombang non linear tersebut.

Sementara untuk solusi numerik dari persamaan KdVB juga telah dibahas dalam berbagai makalah salah satunya yang dibahas oleh M. T. Darvishi dkk. Juga telah melakukan penelitian terkait solusi KdVB. Mereka menggunakan metode kolokasi spektral dan Darvishi Preconditionings untuk membangun solusi numerik dari persamaan KdVB. Bona dan Schonbeck juga telah membahas solusi numerik dari persamaan KdVB dengan permasalahan kondisi batas Cauchy. Pendekatan lainnya untuk menentukan solusi numerik dari KdVB yaitu dengan metode sine-cosine dan metode eliminasi Wu, dengan metode pemisahan (Splitting) oleh A. Aydin, dan dengan Haar Wavelet Methods oleh Farouk dan kawan-kawan.

Solusi-solusi eksak yang telah diperoleh untuk persamaan KdVB tersebut saling ekuivalen satu sama lain. Solusi tersebut berupa kombinasi linear dari solusi persamaan KdV dengan solusi persamaan Burgers. Untuk memperkaya referensi serta memahami sifat fisis yang lebih mendalam bagi persamaan KdVB, dalam makalah ini akan dibahas bentuk persamaan KdVB diruang spektral untuk diselesaikan diruang itu. Untuk itu, terlebih dahulu dibahas persamaan KdVB tersebut.

Persamaan KdVB yang merupakan kombinasi dari persamaan KdV dan persamaan Burgers berbentuk

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xx} + s u_{xxx} = 0$$

Perhatikan bahwa, untuk  $\beta \rightarrow 0$  persamaan akan menjadi persamaan KdV dan untuk

$s \rightarrow 0$  persamaan akan menjadi persamaan Burgers.

Dalam makalah ini, selanjutnya di bahas solusi numerik dari KdVB dengan kondisi inisial

$$u(x, 0) = f(x)$$

dan kondisi batasnya

$$u(x_A, t) = u(x_B, t) = 0$$

untuk domain pengamatan

$$x \in [x_A, x_B]$$

Metode yang akan digunakan yaitu metode spektral yaitu dengan mengasumsikan solusi dari persamaan KdVB terbentuk dari kombinasi dari gelombang-gelombang yang periodik. Dengan asumsi ini, syarat pen-transformasian persamaan KdVB ke ruang spektral telah dipenuhi.

Pertama Persamaan KdVB beserta kondisi inisial ditransformasikan ke ruang spektral secara analitik dan diselesaikan diruang spektral tersebut secara numerik. Penyelesaian persamaan di ruang spektral tersebut dilakukan dengan menggunakan sintaks *ODE45* pada aplikasi Matlab. Hasil yang diperoleh ditransformasi lagi ke ruang riil. Pentransformasian ini juga dilakukan dengan bantuan software Matlab yaitu dengan menggunakan sintaks FFT dan IFFT. Kemudian berdasarkan hasil yang diperoleh dari penggunaan metode tersebut akan ditarik kesimpulan dan juga diberikan beberapa rekomendasi.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas masalah penggunaan metode spektral untuk me nyusun solusi numerik dari persamaan KdVB. Dengan adanya solusi numerik ini diharapkan diperoleh sebuah referensi dalam menyusun kode numerik dari persamaan KdVB guna mendapatkan solusi yang efektif dan efisien. Penyusunan model ini dimulai dari transformasi Fourier dari variabel terikat dari persamaan.

Misalkan  $u(x, t)$  adalah solusi dari persamaan KdVB. Dengan asumsi bahwa  $u(x, t)$  dapat dituliskan sebagai jumlahan dari gelombang-gelombang periodik,

$u(x, t)$  ditransformasi ke ruang spektral. Misalkan  $\hat{u}(k, t)$  adalah transformasi Fourier dari  $u(x, t)$  atas spasialnya, maka

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int u(x, t) \cdot e^{-ikx} dx \quad (1)$$

Dan

$$u(x, t) = \int \hat{u}(k, t) \cdot e^{ikx} dk \quad (2)$$

dengan  $k = 2\pi\xi$  dan  $\xi$  suatu variabel di ruang spektral.

Dengan menggunakan transformasi ini diperoleh

$$u_t(x, t) = \int \hat{u}_t(k, t) \cdot e^{ikx} dk \quad (3)$$

Dan untuk turunan terhadap spasialnya diperoleh

$$u_x(x, t) = ik \int \hat{u}(k, t) \cdot e^{ikx} dk \quad (4)$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xx} + s u_{xxx} \\ = \int \hat{u}_t + ik\alpha \widehat{u^2} - k^2 \beta \hat{u} - ik^3 s \hat{u} \\ \cdot e^{ikx} dk \\ = 0 \end{aligned}$$

Persamaan ini dipenuhi jika dan hanya jika

$$\hat{u}_t + ik\alpha \widehat{u^2} - k^2 \beta \hat{u} - ik^3 s \hat{u} = 0 \quad (5)$$

Dengan demikian diperoleh persamaan KdVB di ruang spasial spectral. Selanjutnya kondisi inisialnya ditransformasikan dan diperoleh

$$\hat{u}(k, 0) = \frac{1}{2\pi} \int u(x, 0) \cdot e^{-ikx} dx \quad (6)$$

Solusi dari persamaan ini menjadi tidak mudah untuk ditentukan karena adanya bagian non linear  $uu_x$  yang dapat dinyatakan sebagai  $(u^2)_x$ . Hal ini menyebabkan munculnya konvolusi di ruang spektral, yaitu  $\widehat{u^2}$ .

Untuk itu, penyelesaian dari persamaan KdVB ini dilanjutkan secara numerik. Penyelesaian numerik dilakukan dengan menyelesaikan sistem persamaan (5) dan (6) dengan menggunakan sintaks ODE45 pada Matlab, yaitu suatu sintaks untuk menentukan solusi dari suatu persamaan diferensial biasa orde satu. Sementara untuk transformasi Fouriernya

digunakan sintaks FFT (*Fast Fourier Transform*) dan IFFT (*inverse of Fast Fourier Transform*) sebagai bentuk numerik dari *Fourier Transform* dan *Inverse Fourier Transform* pada aplikasi Matlab.

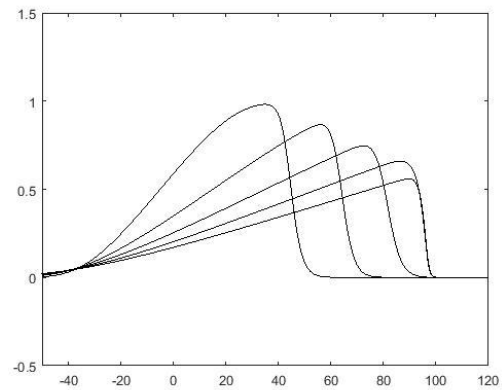
Untuk percobaan solusi numerik dari persamaan KdVB ini, digunakan kondisi inisial

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{|x|}{5} - 5\right)$$

yang akan diamati pada domain  $[-50, 120]$ , dengan kondisi batas

$$u(-50, t) = u(120, t) = 0$$

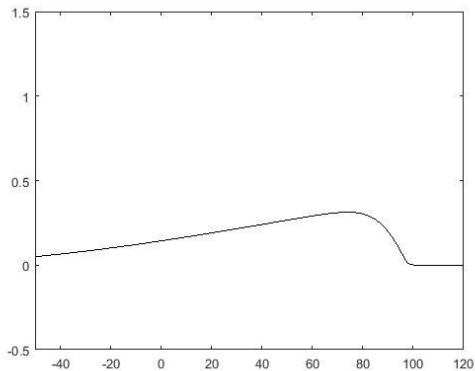
Kemudian dilakukan pengamatan terhadap solusi numerik ini dengan mensimulasikan beberapa gambar terkait untuk waktu-waktu tertentu. Salah satu contoh gambar solusi persamaan KdVB untuk percobaan ini dapat dilihat pada Gambar 3.



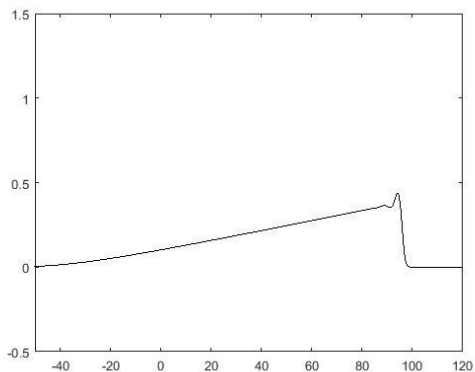
Gambar 3. Solusi Numerik dari Persamaan KdVB pada Waktu  $t = 100s, t = 200s, t = 300s, t = 400s,$  dan  $t = 500s$  untuk  $\alpha = 0,2, \beta = -0,4$  dan  $s = 0,1$ .

Pada gambar terlihat solusi yang diberikan awalnya memiliki tinggi sekitar  $\pm 1$  pada  $t = 100$  berubah secara perlahan menjadi gelombang dengan tinggi  $\pm 0,5$  pada  $t = 500$  (seperti kelima gelombang yang tampak pada gambar). Akan tetapi panjang gelombangnya bertambah. Perubahan ketinggian gelombang ini disebabkan oleh koefisien dispersif dan koefisien dispersif yang diberikan ke dalam persamaan KdV (sebagai model perambatan gelombang non linear).

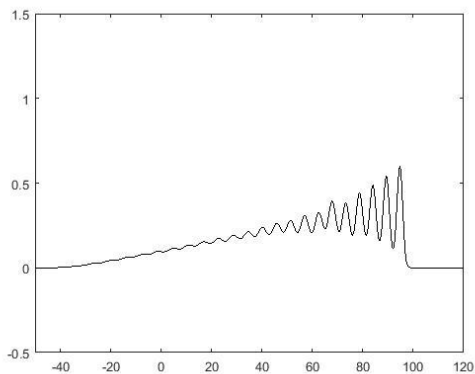
Selanjutnya, diinvestigasi efek koefisien disipatif untuk  $\alpha$  dan  $s$  yang tetap. Berikut ini disajikan beberapa gambar terkait.



(a)



(b)



(c)

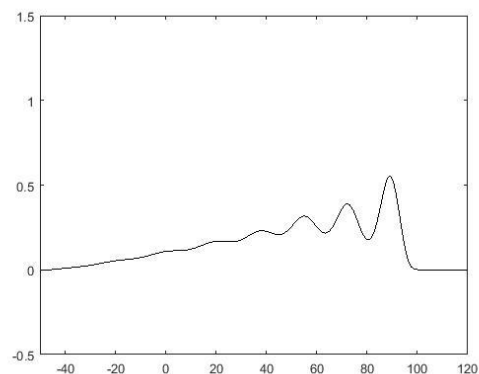
Gambar 4. Solusi Numerik dari Persamaan KdVB pada Waktu  $t = 800s$ , untuk  $\alpha = 0,2$  dan  $s = 0,1$  tetapi  $\beta$  yang berbeda yaitu (a)  $\beta = -1$ , (b)  $\beta = -0,1$ , dan (c)  $\beta = -0,01$ .

Pada Gambar 4 diperlihatkan evolusi dari solusi persamaan KdVB pada  $t =$

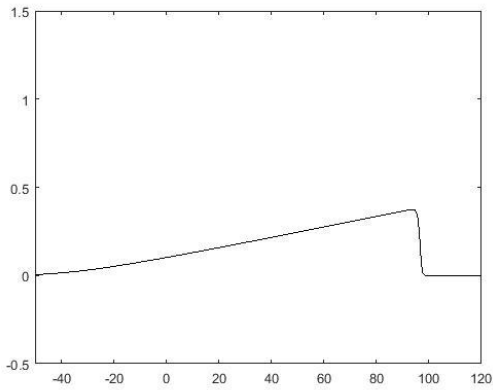
$800s$  dengan koefisien disipatif yang berbeda. Pada gambar 4a. kurva persamaan berupa sebuah gelombang saja. Ketika nilai mutlak koefisien disipatif diperkecil terlihat bahwa gelombang mulai pecah menjadi beberapa bagian, ketika diperkecil lagi hasil terakhir terlihat pada Gambar 4c. Hal ini memperlihatkan bahwa dengan memperkecil nilai mutlak koefisien disipatif ( $\beta$ ) gelombang mulai terdispersif yang berarti koefisien dispersif ( $s$ ) memberikan efek yang dominan.

Secara fisis, memperkecil nilai mutlak koefisien disipatif tersebut, berarti mengu-rangi kekentalan fluida tersebut. Dengan demikian semakin kental fluida maka soliton-soliton yang dibentuknya semakin sulit terdispersi/pecah menjadi gelombang-gelombang penyusunnya. Seperti hasil yang diperoleh tentu saja penyebaran gelombang tersebut tidak hanya dipengaruhi oleh koefisien disipatifnya, tetapi juga dipengaruhi oleh koefisien dispersifnya. Sehingga perlu dilakukan investigasi lebih lanjut.

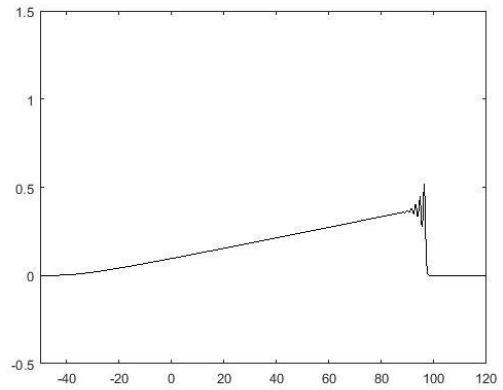
Investigasi terhadap efek koefisien dispersif dilakukan dengan cara yang sama dengan menginvestigasi efek koefisien disipatif yaitu dengan membuat nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  yang tetap dan  $s$  yang berubah-ubah. Berikut ini disajikan tiga gambar hasil simulasi numerik untuk  $s$  yang berbeda. Dengan investigasi ini diharapkan diperoleh gambaran kasar hubungan kedua koefisien tersebut/ pengaruhnya terhadap solusi.



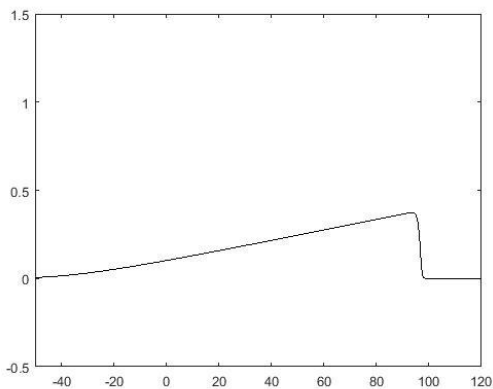
(a)



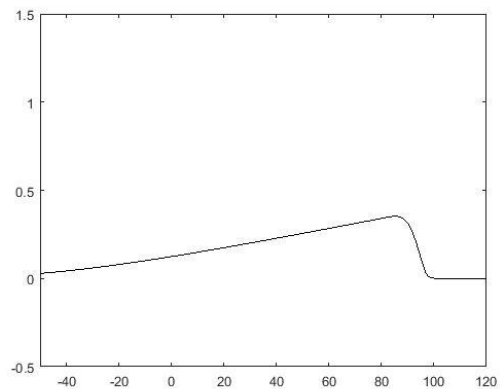
(b)



(a)



(c)



(b)

Gambar 5. Solusi Numerik dari Persamaan KdVB pada Waktu  $t = 800s$ , untuk  $\alpha = 0,2$  dan  $\beta = -0,1$  tetapi  $s$  yang berbeda yaitu (a)  $s = 1$ , (b)  $s = 0,01$ , dan (c)  $s = 0,001$ .

Pada Gambar 5 diperlihatkan evolusi dari solusi persamaan KdVB pada  $t = 800s$  dengan koefisien dispersif yang berbeda. Berdasarkan Gambar 5 dan Gambar 4b ini terlihat bahwa semakin kecil koefisien dispersif gelombang semakin mengumpul, membentuk suatu gelombang tunggal.

Dengan dua pengamatan ini, terlihat bahwa efek dispersif dan disipatif seperti memberikan efek yang berkebalikan (dalam hal penyebaran gelombang). Hal ini memperlihatkan bahwa bentuk gelombang yang merambat dipengaruhi oleh perbandingan antara koefisien disipatif dan koefisien dispersif. Untuk melihat hubungan tersebut perhatikan gambar berikut ini.

Gambar 6. Solusi Numerik dari Persamaan KdVB pada Waktu  $t = 800s$ , untuk  $\alpha = 0,2$  dan  $\frac{s}{\beta} = 1$ , yaitu (a)  $s = 0,01$  dan  $\beta = -0,01$ , (b)  $s = 0,5$  dan  $\beta = -0,5$ .

Berdasarkan Gambar 6 dan Gambar 4b terlihat bahwa gelombang pada Gambar 6a pecah pada bagian atasnya, pada Gambar 4b gelombang hanya sedikit yang pecah dan untuk Gambar 6b gelombang soliter yang dihasilkan utuh. Dengan demikian meskipun dengan perbandingan  $\beta$  dan  $s$  yang tetap, namun bentuk dari gelombang soliternya tetap berbeda. Sehingga perbedaan ini tidak hanya disebabkan oleh pengaruh variabel dispersif dan disipatifnya, akan tetapi juga variabel lainnya.

Karena relasi dari kedua koefisien ini tidak dapat menggambarkan efek yang sama maka koefisien non linear yang berperan pada persamaan ini juga memberikan pengaruh terhadap bentuk

gelombang soliternya. Untuk mengetahui efek ini diperlukan penelitian lanjutan yang membahas tentang bagaimana pengaruh dari ketiga koefisien tersebut. Dengan diperolehnya relasi dari ketiga koefisien ini maka pengamatan terhadap berbagai kasus gelombang soliter dalam berbagai kasus dapat dilakukan.

### KESIMPULAN

Persamaan KdVB merupakan kombinasi dari persamaan KdV dengan persamaan Burgers. Semenjak tahun 1895 hingga saat ini, persamaan KdVB banyak dibahas oleh peneliti. Salah satu hasil yang diperoleh oleh peneliti sebelumnya yaitu solusi yang diberikan adalah juga berupa kombinasi dari solusi persamaan KdV dengan solusi persamaan Burgers.

Dengan mengasumsikan bahwa solusi dari persamaan KdVB dibentuk oleh jumlahan dari gelombang-gelombang periodik, disusun model spektral dari persamaan KdVB untuk diselesaikan secara numerik di ruang spektral. Setelah itu, dengan memanfaatkan sintaks FFT dan IFFT solusi ini ditransformasikan kembali ke ruang riil, sehingga diperoleh solusi yang diharapkan.

Berdasarkan solusi yang diperoleh, dilakukan pengamatan efek koefisien dispersif dan disipatif. Semakin kecil nilai koefisien disipatif mengakibatkan efek dispersif dari persamaan muncul. Dengan demikian untuk sementara disimpulkan bahwa bentuk dari gelombang soliter tersebut ditentukan oleh perbandingan antara koefisien dispersif dan disipatif. Namun demikian, perlu dilakukan penelitian lanjutan terkait efek dari masing-masing koefisien, baik koefisien non linear, koefisien dispersif dan koefisien disipatif. Dengan diperolehnya relasi ini pengamatan numerik terhadap gelombang soliter dapat dilakukan dengan sederhana.

### DAFTAR PUSTAKA

Johnson, R.S. (1996). **A Modern Introduction to Mathematical**

**Models of Water Wave.** Cambridge: Cambridge University Press.

Ahmad, Defri. 2013. **Model Pemantulan Gelombang pada Dinding dengan Pemantulan Parsial.** Tesis S2. ITB.

Aydin, A. (2015). **An Unconventional Splitting for Korteweg de Vries-Burgers Equations.** European Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 8, No.1 Hal. 50-63.

Feng, Zaosheng. (2002). **The first-integral method to study the Burgers-Korteweg-de Vries equation.** Journal of Physics A: Mathematics and General, Volume 35, Hal. 343-349.

Feng, Zaosheng & Meng, Qong-guo. 2007. **Burgers-Korteweg-de Vries equation and its traveling solitary waves.** Science in China Series A: Mathematics, Vol. 50, No. 3, Hal. 412-422.

D. J. Korteweg and G. de Vries, **“On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave,”** *Philosophical Magazine*, vol. 39, pp. 422–449, 1895.

Marchant, T.R.1996.**Soliton Interaction for the Extended Korteweg-de Vries Equation.** IMA Journal of Applied Mathematics, Hal. 157-176.

Jeffrey A, Mohamad M N B. 1991. **Exact solutions to the KdV-Burgers equation.** Wave Motion, 14: 369-375

Shu Jian-Jun.1987. **The proper analytical solution of the Korteweg-de Vries-Burgers equation,** *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:49-56.

Farok, Ahmad dan Ekhlash S. Al-Rawi.2011. **Numerical Solution for Non-linear Korteweg-de Vries-Burger’s Equation Using the Haar Wavelet Method,** *Iraqi Journal of Statistical Science*, (20).