# PERAMALAN RUNTUN WAKTU MUSIMAN DENGAN MENGGUNAKAN METODE WAVELET

**Elfa Rafulta**

STKIP YDB Lubuk Alung

**ABSTRACT**

*Forecasting is one of important things in making decision. Forecasting's part had covered on many fields, such as physics, environment, economics, engineering and health. A method which had been used in forecasting is time series analysis whose present values based on same kind of values on the past. Time series method that often used in seasonal data is known as SARIMA. This research proposes wavelet method, viz. MODWT (Maximal Overlap Discrete Transform), which will be used to analyze the data. Modeling' procedure done with wavelet until scale and wavelet coefficient reached by using MODWT transformation to the time series data. Based on this transformation's result, time series will be modeled and used to forecast one period ahead by assuming each scale and wavelet coefficient as an auto regression process which called as MAR(Multiscale Autoregressive). MAR method is used in this research and compared to SARIMA method. Based on the empiric result for two analyzed data, it shows thattwo data with wavelet method have forecasting error for testing data smaller than SARIMA method*

**Keywords** : *MODWT, MAR, SARIMA, Forecast*

## PENDAHULUAN

Peramalan adalah salah satu unsur yang sangat penting dalam pengambilan keputusan. Peranan peramalan menjelajah ke berbagai bidang, misal fisika, lingkungan, ekonomi, teknik dan ke sehatan. Salah satu metode yang digunakan dalam peramalan adalah analisis runtun waktu yang mendasarkan nilai masa kini berbasis oleh nilai – nilai sejenis di masa lalu. Dalam analisis runtun waktu, nilai masa kini dipengaruhi oleh nilai – nilai sejenis di masa lalu. Analisis runtun waktu secara umum bertujuan untuk mempelajari atau membuat mekanisme model stokastik yang memberikan reaksi suatu runtun yang diamati dan meramalkan nilai runtun waktu yang akan datang didasarkan pada histori runtun itu sendiri.

Komponen data pada runtun waktu terdiri dari trend, siklus dan musiman. Pendekatan dekomposisi deret berkala merupakan metode untuk memisahkan masing – masing komponen. Pendekatan dekomposisi runtun waktu merupakan metode untuk memisahkan masing – masing komponen. Dengan pendekatan ini, penulisan matematis umum dari pendekatan dekom posisi adalah

$$X_t = f(I_t, T_t, C_t, E_t)$$

Untuk meramalkan data financial yang berupa data runtun waktu biasanya dibuat sebuah pemodelan runtun waktu. Ada beberapa pemodelan yang dapat digunakan diantaranya pemodelan Auto regressive (AR), MovingAverage (MA), maupun Autoregressive Moving Average (ARMA). Ketiga model tersebut sangat berguna pada peramalan data runtun waktu. Cara kerja ketiga model tersebut adalah dengan memodelkan proses rerata (mean proses) dari suatu runtun waktu dengan asumsi bahwa datanya sudah stationer dan varians errornya tetap antar waktu (homoscedasticity). Sedangkan analisis runtun waktu dapat juga dilakukan dengan menggunakan analisis domain frekuensi seperti analisis Fourier (Wei, 1990).

Dalam suatu runtun waktu dikenal metode ARIMA untuk menganalisis data. Sedangkan jika datanya adalah data musiman maka metode yang digunakan adalah SARIMA. Orde dari metode ini dapat ditentukan dari pola fungsi autokorelasi (ACF) dan autokorelasi parsial (PACF) yang selanjutnya digunakan untuk menentukan model terbaik dari runtun waktu tersebut. Pada penelitian ini dikembangkan metode peramalan dengan menggunakan wavelet yaitu MODWT (Maximal Overlap Discrete Transform) dengan basis yang digunakan adalah basis Haar dan Daubechies dengan lebar 4 (D4). Dari model terbaik dengan metode SARIMA akan dibandingkan dengan menggunakan metode wavelet MODWT (Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform).

Wavelet merupakan fungsi de komposisi dari wavelet ayah dan wavelet ibu yang masing – masing bagian adalah orthogonal. Wavelet ayah mempunyai sifat smooth sedangkan wavelet ibu mempunyai sifat detail yang mengakibatkan data dapat dipisahkan dalam komponen yang berbeda.

Wavelet banyak digunakan diber bagai bidang, seperti pada signal proces sing, kesehatan, kompresi data, analisis numerik, kimia, statistik. Vidakovic (1999) mengungkapkan penggunaan wavelet di bidang statistik diantaranya adalah sebagai estimator densitas, analisis runtun waktu dan model Bayes. Sedangkan Abramovich (2000) membahas aplikasi wavelet pada regresi non parametrik.

Penelitian ini mengkaji mengenai peranan wavelet untuk menganalisis data runtun waktu yang musiman, sekaligus membuat peramalan satu periode ke depan berdasarkan model yang diperoleh. Jenis metode wavelet yang digunakan dalam tesis ini adalah Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT) dengan keluarga wavelet Daubechies dan Haar wavelet. Penggunaan MODWT diusulkan untuk mengatasi keterbatasan dari Discrete Wavelet Transform (DWT) yang mensyaratkan N=2J dengan J bilangan bulat positif, padahal data runtun waktu tidak selalu banyak data selalu berkelipatan dua.

## METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji literatur dalam bentuk
2. Pengambilan data diambil dari penjualan rumah di Amerika Serikat (dalam ribuan unit),dari bulan Januari 1965 sampai dengan Desember 1975, dengan jumlah data sebanyak 132.
3. Setelah data diolah, kita dapat mengetahui model runtun waktu dengan menggunakan metode wavelet MODWT dan membandingkan model runtun waktu antara metode MODWT dengan SARIMA

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Runtun waktu adalah himpunan observasi berurut dalam waktu atau dalam dimensi apa saja yang lain. Analisis runtun waktu secara umum bertujuan untuk mempelajari atau membuat mekanisme model stokastik yang memberikan reaksi suatu runtun yang diobservasi dan mem prediksi atau meramalkan nilai random waktu yang akan datang didasarkan pada histori runtun itu sendiri.

Jika runtun waktu aslinya kontinu, kita dapat memperoleh analisis runtun waktu yang diskrit dengan mengambil observasi pada waktu – waktu tertentu, atau dengan mengakumulasikan observasi untuk suatu periode waktu tertentu.

Suatu runtun waktu, jika dipandang dari sejarah nilai observasi itu diperoleh, dapat dibedakan atas runtun waktu deterministik dan runtun waktu stokastik (statistik). Runtun waktu deterministik adalah runtun waktu dimana nilai observasi yang akan datang dapat diramalkan dengan pasti. Runtun waktu deterministik ini tidak memerlukan penyelidikan lebih lanjut. Runtun waktu stokastik adalah runtun waktu dimana nilai observasi yang lampau hanya dapat menunjukkan struktur pro babilistik nilai observasi yang akan datang.

Runtun waktu statistik merupakan suatu realisasi dari suatu proses statistik maka tidak mungkin diperoleh realisasi yang lain suatu proses statistik, yaitu kita tidak dapat mengulang kembali keadaan untuk memperoleh himpunan observasi serupa seperti yang pernah dikumpulkan. Suatu runtun waktu $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ memenuhi kondisi stasioner jika untuk semua t dipenuhi :

1. $E(X_t) = \mu$
2. $\text{var}(X_t) < \infty$
3. $\gamma_x(r,s) = \gamma_x(r+t, s+t)\ \forall r,s,t \in \mathbb{Z}$

Jika $\{Y_t\}$ adalah barisan variable random yang tidak berkorelasi dengan mean $E[Y_t] = \mu = 0$ dan variansi $Var(Y_t) = \sigma^2$ maka $\{Y_t\}$ disebut proses *white noise* yang dinotasikan $\{Y_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ dengan fungsi autokovariansinya adalah

$$Cov(Y_{t+h}, Y_t) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

Dan fungsi autokorelasinya,

$$Cor(Y_{t+h}, Y_t) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

Proses *white noise* merupakan proses yang penting karena dianggap sebagai faktor pembangun bagi proses runtun waktu lainnya (*building block*).

Didefinisikan suatu kovariansi dari $Y_t$ dan $Y_{t+k}$ ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+k}) &= E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] \\ &= \gamma(k) \end{aligned}$$

Dan korelasi antara $Y_t$ dan $Y_{t+k}$ adalah:

$$\rho(k) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Dengan catatan bahwa

$$Var(X_t) = Var(X_{t+k}) = \gamma(0)$$

Sebagai fungsi dari $k$, $\gamma(k)$ disebut sebagai fungsi autokovariansi dan $\rho(k)$ disebut sebagai fungsi autokorelasi (ACF). Dalam praktek sehari-hari dapat digunakan fungsi autokovariansi sampel dan fungsi autokorelasi sampel, dimana

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$$

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2},$$

dengan $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$

Adapun sifat-sifat dari fungsi auto kovariance $\gamma(k)$ dan autokorelasi $\rho(k)$ adalah sebagai berikut:

1. $\gamma(0) = Var(X_t)$ dan $\rho(0) = 1$
2. $|\gamma(k)| \leq \gamma_0$ dan $|\rho(k)| \leq 1$
3. $\gamma(k) = \gamma(-k)$ dan $\rho(k) = \rho(-k)$ untuk semua $k$, yaitu $\gamma(k)$ dan $\rho(k)$ simetris. Sifat ini berasal dari fakta bahwa perbedaan waktu antara $X_t$ dan $X_{t+k}$ serta $X_t$ dan $X_{t-k}$ adalah sama. Karena itulah biasanya fungsi autokorelasi plot hanya untuk lag nonnegative saja.

Proses *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) adalah analisis runtun waktu non stasioner yang dinyatakan sebagai ARIMA (p,d,q ) yang didefinisikan d bilangan bulat non negatif, maka $\{X_t\}$ adalah proses *ARIMA (p,d,q).* Jika $Y_t \equiv (1-B)^d X_t$ *a*dalah proses *ARMA (p,q).*

Suatu proses runtun waktu $X_t$ dikatakan periodik dengan periode s jika $X_t = X_{t-s}$, $t \in \mathbb{Z}$. Interaksi antara model musiman dan model ARIMA memiliki dua bentuk yaitu:

1. Model Seasonal *Additive* (penjum lahan) dilambangkan dengan SARIMA ((p,P),(d,D),(q,Q))s. Ada dua macam interaksi yang mungkin, yakni

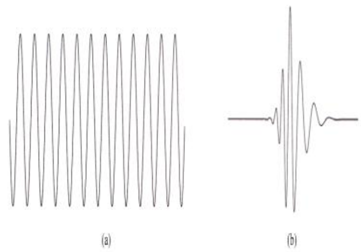
a. interaksi antara model musiman dengan ARIMA secara additive pada komponen moving average,

b. Interaksi antara model musiman dengan ARIMA secara additif pada komponen autoregresi.
2. Model Seasonal Multiplikatif. Pada model ini, komponen musiman berinteraksi dengan komponen dalam model secara multiplikatif yaitu dengan notasi operator lag untuk model SARIMA (p,d,q) (P,D,Q)s Interaksi antara model musiman dengan ARIMA secara perkalian pada komponen moving average, Dan interaksi antara model musiman dengan ARIMA secara perkalian pada komponen autoregresive

Identifikasi model dengan *wavelet* digunakan metode MODWT dengan variant *wavelet* Haar dan D4 pada level 4, dan selanjutnya dengan menggunakan *Multiscale Autoregressive* (MAR) untuk membentuk model dengan *wavelet*. Adapun langkahnya sebagai berikut

1. Data stasioner
a. Melakukan dekomposisi dengan MODWT
b. Mendapatkan koefisien skala dan wavelet
c. Model untuk meramalkan ˆtX dengan AR orde 1 dan orde 2
    - seperti pada Renaud dkk(2002)
    - seperti pada Renaud dkk (2002) dengan tambahan lag – lag musiman dan lag musiman1
d. Melakukan pengujian signifikansi parameter dan asumsi model.
e. Melakukan peramalan berdasarkan model yang didapat.
2. Data tidak stasioner
a. Data distasionerkan.
b. Melakukan dekomposisi dengan MODWT
c. Mendapatkan koefisien skala dan wavelet
d. Data koefisien yang didapat dikerjakan dengan MAR
    - seperti pada Renaud dkk (2002)
    - seperti pada Renaud dkk (2002) dengan tambahan lag – lag musiman dan lag musiman1
e. Melakukan pengujian signifikansi parameter dan asumsi model.
f. Melakukan peramalan menggunakan model yang didapat.

Gelombang (*wave*) didefinisikan sebagai fungsi osilasi atas waktu atau ruang dan periodik (seperti sinusoida). Perluasan dari sinyal atau fungsi dalam bentuk sinusoida sangat bernilai di bidang matematika, ilmu pengetahuan dan teknik. *Wavelet* diartikan suatu gelombang kecil , dengan energi terkonsentrasi dalam waktu tertentu. Sebagai perbandingan antara *wave* dan *wavelet* diberikan pada gambar di bawah ini.



Gambar 1. (a) Wave (b) Wavelet

Fungsi $\psi(.)$ didefinisikan sebagai wavelet jika *:*

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)\,du = 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(u)\,du = 1$

Dalam transformasi wavelet terdapat dua fungsi, yaitu fungsi skala (father wavelet) dan mother wavelet. Kedua fungsi ini menghasilkan suatu keluarga fungsi yang dapat digunakan untuk merekonstruksi suatu sinyal.

Contoh wavelet Haar :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1, \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0, t \text{ yang lain} \end{cases}$$

Ide pendekatan dari suatu fungsi dengan wavelet adalah bagaimana mengkonstruksi suatu fungsi tunggal $\psi$ sehingga keluarga $\{\psi_{jk} \mid j,k \in \mathbb{Z}\}$ dapat membangun $L^2(R)$. Andaikan $\{\psi_l(t) | l \in \mathbb{Z}\}$ adalah basis ortogonal yang membangun $L^2(R)$, dengan demikian untuk setiap $f(t) \in L^2(R)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\psi_l(t)$, sehingga

$$f(t) = \sum_l a_l \psi_l(t)$$

dengan $l \in \mathbb{Z}$ dan

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \psi_k(t)\psi_l(t)dt = 0 \qquad k \neq l$$

Sehingga

$$a_k = \langle f(t), \psi_k(t) \rangle = \int f(t)\psi_k(t)dt$$

Dengan ekspansi wavelet, sistem dibangun dengan dilatasi (dengan indeks j ) dan translasi (dengan indeks k). Sehingga

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_{j,k}(t)$$

dengan

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - k\right) \qquad j,k \in \mathbb{Z}$$

Didefinisikan fungsi skala dengan translasi integer dari fungsi skala dasar diberikan dengan

$$\varphi_k(t) = \varphi(t-k) \qquad k \in \mathbb{Z} \quad \varphi \in L^2(R)$$

Keluarga dari fungsi skala dibangkitkan dari fungsi skala dasar dengan dilatasi sebesar j dan translasi sebesar k yang didefinisikan sebagai

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi\left(2^j t - k\right) \qquad j,k \in \mathbb{Z}$$

Dengan $\{\varphi_k(2^j t)\}$ merupakan basis dari $V_j$ sehingga jika $f(t) \in V_j$ maka dapat dinyatakan sebagai

$$f(t) = \sum_k a_k \varphi(2^j t - k)$$

Analisis Multiresolusi dalam L2(R) didefinisikan sebagai barisan ruang bagian tertutup $\{V_j, j \in Z\}$ yang memenuhi sifat – sifat sebagai berikut:

1. $\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$
2. $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_j V_j} = L2(R)$
3. $f\left(2^j t\right) \in V_j, \quad f(t) \in V_0$
4. Terdapat fungsi skala $\varphi \in Vo$ adalah translasi kombinasi linear ruang Vo,

$$Vo = \left\{ f \in L2(R) \mid f(t) = \sum_k c_k \varphi(t-k) \right\}$$

dan $\{\varphi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$ basis orthogonal.

Jika $\varphi(t) \in V_0$ maka $\varphi(t) \in V_1$, diketahui $\{\varphi_n(2t)\}$ merupakan basis dari $V_1$, sehingga $\varphi(t)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\varphi(t) = \sum_n g_n \sqrt{2}\varphi\left(2t - n\right) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Dengan $\{g_n\}$ disebut *skala filter*.

Komplemen orthogonal dari $V_j$ dalam $V_{j+1}$ didefinisikan sebagai $W_j$ sehingga

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Jika basis dari $V_j$ adalah $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ dan basis dari $W_j$ adalah $\{\psi_{j,l}(t)\}$ maka

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int \varphi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(t)dt = 0$$

Dengan mengambil j=0 diperoleh

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

Karena $W_0 \subset V_1$ dan basis dari $W_0$ adalah $\psi(t)$ maka

$$\psi(t) = \sum_n h_n \sqrt{2}\varphi\left(2t - n\right) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Dengan $\{h_n\}$ disebut *wavelet filter*

$$\left\{2^{j/2}\varphi\left(2^j t - k\right)\right\}$$

merupakan basis $V_j$ maka aproksimasi barisan wavelet orthogonal untuk

Dimana J menyatakan skala atau banyaknya komponen multiresolusi dan k bernilai 1 sampai ke banyaknya koefisien di dalam komponen. Koefisien $c_{j,k}$ disebut koefisien penghalus ( koefisien fungsi skala) dan $d_{j,k}$ disebut koefisien detail (koefisien wavelet)

Untuk sebarang bilangan bulat positif $Jo$ merupakan level MODWT dari $\mathbf{X}$ adalah transformasi yang terdiri dari vektor sebanyak $Jo+1$ yaitu $\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2, \cdots, \widetilde{W}_{Jo}, \widetilde{V}_{Jo}$ yang masing – masing dengan dimensi N. Vektor $\widetilde{W}_j$ memuat koefisien wavelet MODWT ,sedangkan $\widetilde{V}_{Jo}$ memuat koefisien skala MODWT yang didefinisikan sebagai

$$\widetilde{\mathbf{W}}_j = \widetilde{\mathcal{W}}_j \mathbf{X} \quad \text{dan} \quad \widetilde{\mathbf{V}}_{Jo} = \widetilde{\mathcal{V}}_{J0} \mathbf{X}$$

Dengan $\widetilde{\mathcal{W}}_j, \widetilde{\mathcal{V}}_{J0}$ matrik NxN .
Runtun waktu $\mathbf{X}$ dapat ditemukan kembali dari MODWT melalui

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{Jo} \widetilde{\mathcal{W}}_j^T \widetilde{\mathbf{W}}_j + \widetilde{\mathcal{V}}_{Jo}^T \widetilde{\mathbf{V}}_{Jo}$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{Jo} \widetilde{\mathcal{D}}_j + \widetilde{\mathcal{S}}_{Jo}$$

Wavelet filter MODWT pada level j dan skala filter MODWT pada level j didefinisikan sebagai

$$\tilde{h}_l \equiv \frac{h_l}{\sqrt{2}} \quad \text{dan} \quad \tilde{g}_l = \frac{g_l}{\sqrt{2}}$$

Transformasi dari $\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ ke $\widetilde{\mathbf{W}}_j$ dan $\widetilde{\mathbf{V}}_j$ dapat dideskripsikan menggunakan matrik NxN dari $\widetilde{\mathcal{B}}_j$ dan $\widetilde{\mathcal{A}}_j$ yaitu

$$\widetilde{\mathbf{W}}_j = \widetilde{\mathcal{B}}_j \widetilde{\mathbf{V}}_{j-1} \text{ dan } \widetilde{\mathbf{V}}_j = \widetilde{\mathcal{A}}_j \widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}$$

Selanjutnya sintesis $\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ dari $\widetilde{\mathbf{W}}_j$ dan $\widetilde{\mathbf{V}}_j$ dapat juga dinyatakan dalam bentuk $\widetilde{\mathcal{B}}_j$ dan $\widetilde{\mathcal{A}}_j$ sehingga

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1} = \widetilde{\mathcal{B}}_j^T \widetilde{\mathbf{W}}_j + \widetilde{\mathcal{A}}_j^T \widetilde{\mathbf{V}}_j .$$

Suatu sinyal $X = \left( X_i : i = 1, 2, \cdots, t \right)$ stasioner. Suatu proses AR dengan orde P dapat ditulis

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t .$$

Dalam penggunaan dekomposisi maka proses AR menjadi proses *Multiscale Autoregressive (MAR)* yang diberikan oleh Renaud dkk (2002) :

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{A_j} \hat{a}_{j,k} \tilde{w}_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_j} \hat{a}_{J+1,k} \tilde{v}_{J,t-2^J(k-1)}$$

Dengan $j$ adalah level wavelet $\left( j = 1, 2, \cdots, J \right)$

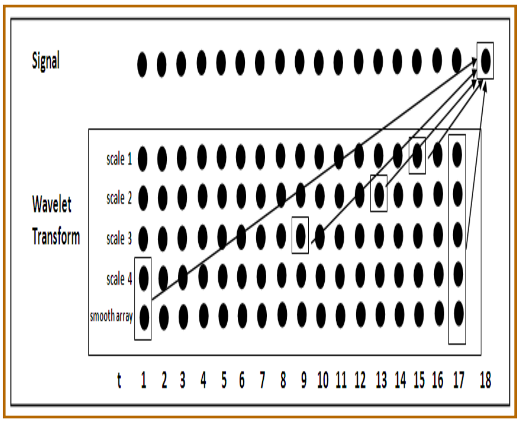
$A_j$ adalah orde MAR $\left( k = 1, 2, \cdots, A_j \right)$

$w_{j,t}$ adalah koefisien wavelet dari data

$v_{j,t}$ adalah koefisien skala dari data

$a_{j,k}$ adalah koefisien MAR

Untuk menjelaskan input dan prosedur peramalan data ke t+1 dapat dilihat pada gambar di bawah yang mewakili untuk model dengan level J=4, orde MAR $A_j = 2$



.

Gambar 2. Model MAR

Metode MAR diusulkan untuk mengikuti proses AR untuk masing – masing skala dari transformasi multi resolusi. Berikut akan diberikan teorema yang menunjukkan apakah model tersebut prosesnya AR, melalui konvergensi prosedur peramalannya terhadap prosedur optimal dan secara asimtotik akan ekivalen ke peramalan terbaik.

**Teorema :**

*Misalkan* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *mengikuti proses kausal AR dengan orde p dengan parameter* $\phi' = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p\}$.

*Misal* $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t$ *dengan* $\{a_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$.

*Jika orde* $A_j$ *dipilih pada masing – masing skala lebih besar atau sama dengan* $p/2^j$ *untuk* $j = 1, 2, \cdots, J$ *maka model multiresolusi yaitu*

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{A_j} \hat{a}_{j,k} d_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_j} \hat{a}_{J+1,k} s_{J,t-2^J(k-1)},$$

*dengan bertambahnya ukuran sampel,* $\hat{\alpha}$ *mempunyai sifat asimtotik :*

$$n^{1/2}(\hat{\alpha} - \alpha) \Rightarrow N\left(0, \sigma^2 \left(R'\mathcal{W}_B'\Gamma_B \mathcal{W}_B R_B\right)^{-1}\right)$$

*dengan* $\alpha$ *sebanding dengan* $\Omega\phi$*, dan*

$$\Gamma_B = \left[\gamma(t-k)\right]_{t,k=1,2,\cdots B}$$

*adalah matriks autokovarian dengan* $\gamma(l)$ *autokovarians dari runtun waktu pada lag(l).*

Metode perhitungan yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan menggunakan metode SARIMA ( Box Jenkins ) dan Metode Wavelet dengan wavelet filter Haar dan D4 yaitu dengan MAR seperti yang dilakukan Renaud dkk(2002) dengan tambahan lag – lag musiman dan lag musiman ±1 dengan penentuan variabel yang signifikan membentuk model dilakukan dengan *stepwise*.

Metode SARIMA merupakan salah satu metode peramalan yang sederhana. Metode lain yang bisa digunakan yaitu metode ARIMA yang memberikan MSE yang lebih kecil. Dalam *trial* and *error* kita terlebih dahulu mendapatkan model SARIMA.

Selanjutnya hasil peramalan masing–masing metode akan dibandingkan dilihat dari kesalahan peramalan yaitu berdasarkan nilai MSE dan MAPE.

Analisa perhitungan dalam penelitian ini menggunakan studi kasus yaitu sebanyak tiga data musiman yaitu, Series 14 ( penjualan rumah di Amerika Serikat (dalam ribuan unit)), Series 10 (pendapatan bulanan dari divisi perbaikan dari perusahaan alat berat di Iowa (dalam ribuan dolar)), dan Series 3 (rata-rata penggunaan listrik pada rumah tangga Iowa) yang diambil dari Abraham dan Ledolter (1983).

Hasil analisis dari studi kasus tiga data ini, dua data menunjukkan metode MAR mempunyai kesalahan peramalan yang lebih kecil berdasarkan kriteria MSE dan MAPE dibandingkan metode SARIMA yaitu Series 14 dan Series 10. Sedangkan satu data yaitu Series 3 menunjukkan metode SARIMA menghasilkan kriteria kesalahan peramalan yang lebih kecil . Kasus data kesatu, jika dikaitkan dengan metode SARIMA maka di dalamnya mengandung komponen AR. Sedangkan data kedua dan ketiga merupakan proses MA dapat dimodelkan dengan MAR yang merupakan proses autoregressive. Hasil peramalan pada kasus kedua dengan metode MAR lebih baik daripada metode SARIMA. Hal ini jika diamati dari plot data maka pada kasus kedua datanya terjadi lompatan meskipun data sudah dilakukan transformasi untuk menstasionerkan data.

## KESIMPULAN

1. Peramalan dengan menggunakan MAR untuk data musiman perlu ditambahkan lag-lag musiman.
2. Proses *moving average* (MA) dapat dimodelkan sebagai model MAR yang masing – masing bagian koefisien *skala* dan *wavelet* merupakan proses *autoregressive.*

## DAFTAR PUSTAKA

Abraham, Bovas dan Johannes Ledolter. 1983. **Statistical Methods for Forecasting.** John Wiley & Sons.Inc.

Abramovich, Felix. Bailey, Trevor C and Sapatinas, Theofanis. 2000. **Wavelet Analysis and Its Statistical Applications.** Royal Statistical Society , 0039-0526/00 /49001

Box, George E.P dan Gwilyn M. Jenkins. 1970, **Time Series Analysis Forecasting and Control.** Holden-Day.Inc., California

Brockwell, Peter J dan Richard A Davis. 1991. **Time Series Theory & Methods.** Springer Verlag . New York.

Bollerslev, T. (1986). **"Generalized Auto regressive Conditional Hetero Skedasticity",** Journal of Econo metrics, 31, 307-327.

Engle, R. (1982). **"Autoregressive Condi Tional Heteroskedasticity with Esti Mates of The Variance of United Kingdom In. Ation",** Econometrica, 50, 987-1008.

Renaud,O. J.L Starck and F. Murtagh. 2002. **Wavelet-based Forecasting of Short and Long Memory Time Series.** Universite de Geneve. Geneve

Percival, Donald B dan Andrew T Walden. 2000. **Wavelet Methods for Time Series Analysis**, Cambridge University Press. America

Vidakovic, Brani. 1999. **Statistical Modeling by Wavelets**. John Wiley & Sons. Inc. New York.

Wei, William W.S. 1990. **Time Series Analysis**. Addison Wisley. New York.