

# KESTABILAN MODEL SIS DENGAN LOGISTIK DAN NON MONOTON INCIDENCE RATE

Mohammad Soleh

Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau,  
msoleh1975@yahoo.co.id

## ABSTRACT

*Our paper proposed a non monotonous incidence rate, logistic growth, and migration for SIS model. The character of originally of SIS model which using bilinear incidence rate will cover by new model. An existences and stabilities of free disease state and endemic are investigated to explore the characteristic of model. The existence of equilibrium point is founded by solving differential equation of the model and their stability is explored by an Eigen criteria. We obtained that only one free disease state and endemic which asimtotycal stable by condition.*

**Keywords:** *SIS Model, Non Monoton Incidence Rate, Free Disease state, Endemic state, Stability*

---

## PENDAHULUAN

Tuber culosis (TBC), peunomia, meningitis, pertusis, shypilis, dan gonorhea, merupakan penyakit-penyakit yang dapat menyerang kembali orang yang sudah sembuh dari penyakit tersebut. Dengan lain kata, individu yang telah terbebas dari penyakit tertentu seperti di atas, tidak memiliki kekebalan untuk tak terjangkiti lagi. Begitu individu sembuh dari sakit itu, individu tersebut kembali langsung rentan terhadap virus/bakterinya. Hal demikian berbeda dengan penyakit campak, cacar, cacar air, gondok, ataupun rubella, yang tidak menimbulkan resiko tertular lagi bagi orang yang telah sembuh.

Model epidemi SIS (*Susceptible, Infectives, Susceptible*) adalah model matematika untuk penyakit yang tidak memberikan kekebalan kepada penderitanya setelah sembuh. Model ini merupakan pengembangan dari model SIR (*Susceptible, Infectives, Recover*) oleh Kermack & Mckendrick [4], yaitu mengeliminasi kelas  $R$  karena waktu kebalnya sangat singkat.

Secara umum model SIS dan yang lainnya disusun secara deterministik, mengasumsikan populasi konstan, dan

homogen dengan laju penularan berbentuk bilinear  $g(I)S = \beta IS$ . Laju penularan  $g(I)S = \beta IS$  menyatakan bahwa peru bahan jumlah individu rentan menjadi terinfeksi berbanding secara linear terhadap  $I$  atau  $S$ . Semakin banyak individu yang sakit maka semakin banyak individu yang dapat tertular.

Dalam perkembangannya laju penularan bilinear tidak cocok dengan situasi sebenarnya karena asumsi homogen yang sulit terpenuhi. Disamping itu juga faktor psikologis akan mempengaruhi populasi ketika jumlah individu terinfeksi terlalu banyak. Biasanya akan dilakukan penanganan untuk mengurangi penularan penyakit. Efek ini dikenal sebagai *Saturation effect*, yaitu keadaan ketika jumlah individu sakit membesar tetapi jumlah individu tertular menurun.

Capasso & Serio (1973) mengusulkan bentuk lain laju penularan. Bentuk yang diusulkannya adalah mengganti asumsi bilinear menjadi nonlinear  $\frac{\beta IS}{1+kI}$ , dengan  $k$  bilangan positif. Dengan demikian jumlah kejadian individu rentan menjadi terinfeksi tidak lagi linear terhadap  $I$  tetapi sedikit lebih lambat dari  $I$ . Kemudian

bentuk ini dikembangkan lagi oleh Ruan & Xio menjadi  $\frac{\beta IS}{1+kI^2}$ . Selanjutnya diperumum oleh beberapa matematikawan, seperti oleh Liu et.all (2002), Moghadas et.all (2010), dan Gupta et.all (2012) menjadi  $\frac{\beta I^p S}{1+kI^p}$ , dengan  $p$  positif. Chufen Wu et.all (2010) mengusulkan bentuk yang lebih umum yaitu  $aU(S)I$  sebagai *general non monotone incidence rate*. Di lain pihak, Kar et.all (2010) mengajukan bentuk lain  $\frac{\beta IS}{1+k_1I+k_2I^2}$ . Untuk selanjutnya bentuk-bentuk  $\frac{\beta IS}{1+kI}$ ,  $\frac{\beta IS}{1+kI^2}$ ,  $\frac{\beta I^p S}{1+kI^p}$ ,  $aU(S)I$ , dan juga  $\frac{\beta IS}{1+k_1I+k_2I^2}$  dikenal sebagai *non monotone incidence rates*.

Pada umumnya juga model yang telah dibahas mengasumsikan populasi tertutup dengan sumber daya tak terbatas. Padahal adanya migrasi (imigrasi dan emigrasi) dan keterbatasan sumber daya lingkungan merupakan keniscayaan pada suatu populasi. Penulis menambahkan kedua asumsi tersebut pada model SIS untuk memperkaya sifat dinamik model.

## METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah pengembangan dari Soleh [10], dengan mengganti asumsi pertumbuhan eksponensial menjadi pertumbuhan logistik dan adanya migrasi. Eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik di cari dengan menganalisis sistem persamaan differensial model [9]. Kestabilan titik ekuilibrium diinvestigasi dengan menggunakan kriteria nilai eigen matriks Jacobian [9] untuk menemukan sifat penyebaran penyakit yang dibicarakan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan model SIS [10]. Terlebih dulu populasi dibagi menjadi dua kelas yaitu kelas *susceptible* atau kelas yang berisi individu-individu rentan terhadap penyakit, dan kelas *infectives* atau kelas yang berisi individu-individu terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit.

Jika  $N(t)$  menyatakan jumlah populasi pada saat  $t$ ,  $S(t)$  jumlah individu yang *suspect* pada saat  $t$ , dan  $I(t)$  menyatakan jumlah individu terinfeksi pada saat  $t$ , maka  $N(t) = S(t) + I(t)$  atau dalam bentuk proporsi  $S(t) + I(t) = 1$ .

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu - \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 I + \alpha_2 I^2} - \mu S + \gamma I \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 I + \alpha_2 I^2} - (\mu + \gamma)I$$

dengan  $\mu, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \gamma$  semuanya bilangan positif. Terlihat bahwa model (1) mempunyai  $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0$ , yang berarti jumlah populasi selalu konstan.

Dengan mengganti laju pertumbuhan logistik dan adanya migrasi pada model (1) maka diperoleh model SIS:

$$\frac{dS}{dt} = N(a - bN) - \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)S + \gamma I \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)I$$

$$N = S + I.$$

Dengan  $\rho_1, \rho_2$  masing-masing laju imigrasi dan laju emigrasi, dan  $N(a - bN)$  merupakan laju pertumbuhan logistik. Terlihat bahwa model (2) mempunyai  $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} \neq 0$ , yang berarti jumlah populasi tidak konstan.

## Keadaan Setimbang

Keadaan setimbang dari model (2) yaitu keadaan bebas penyakit dan keadaan endemik penyakit, yang masing-masing disebut titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Kedua keadaan tersebut dijelaskan pada teorema sebagai berikut:

**Teorema 1:** Selalu terdapat satu titik ekuilibrium bebas penyakit pada model (2) dan jika  $\rho_1 < \rho_2 + \gamma < \rho_1 + \beta N^*$  maka model (2) memiliki satu titik ekuilibrium endemik.

Bukti: Dari model (2) diperoleh bahwa

$$N(a - bN) - \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)S + \gamma I = 0$$

$$\frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)I - \gamma I = 0$$

Untuk keadaan bebas penyakit yaitu  $I = 0$ , maka

$$N^*(a - bN^*) - \frac{\beta S^* I^*}{1 + k_1 I^* + k_2 I^{*2}} - \mu S^* + \gamma I^* = 0$$

menyebabkan  $N^*(a - bN^*) - \mu S^* = 0$ . Karena  $N^* = S^* + I^* = S^*$ , maka  $S^*(a - bS^*) - \mu S^* = 0$ . Sehingga titik ekilibrium bebas penyakit yang diperoleh adalah  $(S^*, I^*) = \left(\frac{a + \rho_1 - \rho_2}{b}, 0\right)$ . Terbukti ada satu titik ekuilibrium bebas penyakit untuk model (2). Sementara itu untuk mendapatkan titik ekuilibrium endemik diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\frac{\beta \hat{S} \hat{I}}{1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)I = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\beta \hat{S}}{1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma) \right) \hat{I} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\beta \hat{S}}{1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma) = 0$$

karena  $\hat{I} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta(N^* - \hat{I})}{1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2} + \frac{(\rho_1 - \rho_2 - \gamma)(1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2)}{1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta N^* - \beta \hat{I} = (-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)(1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2)$$

$$\Leftrightarrow \beta N^* - \beta \hat{I} = (-\rho_1 + \rho_2 + \gamma) + (-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)(k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2)$$

$$\Leftrightarrow (-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)k_2 \hat{I}^2 + (\beta + (-\rho_1 + \rho_2 + \gamma))\hat{I} - \beta N^* + (-\rho_1 + \rho_2 + \gamma) = 0$$

Misalkan:

$$r = -\rho_1 + \rho_2 + \gamma$$

$$\hat{I} = \frac{-(\beta + k_2 r) \pm \sqrt{(\beta + k_2 r)^2 + 4k_2 r(\beta N^* - r)}}{2k_2 r} \quad (3)$$

Dengan demikian benar jika  $\rho_1 < \rho_2 + \gamma < \rho_1 + \beta N^*$  benar bahwa terdapat satu titik ekuilibrium endemik penyakit untuk model (2). Titik keseimbangan endemik tersebut dapat ditulis sebagai  $(\hat{S}, \hat{I})$ , dengan  $\hat{I}$  merupakan akar dari persamaan (3) dan  $\hat{S} = N^* - \hat{I}$

### Kestabilan Keadaan Setimbang

Kestabilan kedua titik kesetimbangan model (2) dapat dijelaskan melalui teorema berikut ini:

**Teorema 2:** titik keseimbangan bebas penyakit  $(S^*, I^*) = \left(\frac{a + \rho_1 - \rho_2}{b}, 0\right)$  stabil asimtotik jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) < b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$ .

Dari persamaan pada model (2) dimisalkan:

$$f(S, I) = N(a - bN) - \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)S + \gamma I$$

$$g(S, I) = \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)I$$

Turunan parsial-turunan parsial dari fungsi  $f(S, I)$  dan  $g(S, I)$  ialah

$$\frac{\partial f}{\partial S} = -\frac{\beta I}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + \rho_1 - \rho_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{-\beta S(1 + k_1 I + k_2 I^2) + \beta SI(k_1 + 2k_2 I)}{(1 + k_1 I + k_2 I^2)^2} + \gamma$$

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{\beta I}{1 + k_1 I + k_2 I^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial I} = \frac{\beta S(1 + k_1 I + k_2 I^2) - \beta SI(k_1 + 2k_2 I)}{(1 + k_1 I + k_2 I^2)^2} - (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)$$

Sehingga matriks Jacobian model (2) dapat ditulis:

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{pmatrix}$$

Untuk kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dihitung sebagai:

$$J(S^*, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 - \rho_2 & -\beta S^* \\ 0 & \beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{pmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen matriks Jacobian  $J(S^*, 0)$ :

$$\begin{aligned} & (\lambda - (\rho_1 - \rho_2))(\lambda \\ & \quad - (\beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma)) \\ & = 0 \end{aligned}$$

menyebabkan

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \rho_1 - \rho_2 < 0 \leftrightarrow \rho_1 < \rho_2 \\ \lambda_2 &= \beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \leftrightarrow \beta S^* \\ & < -\rho_1 + \rho_2 + \gamma \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} S^* &< \frac{-\rho_1 + \rho_2 + \gamma}{\beta} \leftrightarrow \frac{a + \rho_1 - \rho_2}{b} \\ &< \frac{-\rho_1 + \rho_2 + \gamma}{\beta} \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow \beta(a + \rho_1 - \rho_2) < b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$$

Terbukti bahwa jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) < b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.

**Teorema 3:** Jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$  maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik.

Bukti: pandang kembali titik ekuilibrium endemik  $(\hat{S}, \hat{I})$ , dimana  $\hat{S} = N^* - \hat{I}$  dengan  $\hat{I}$  merupakan akar positif dari persamaan (3).

Maka matriks  $J(\hat{S}, \hat{I})$  adalah:

$$J(\hat{S}, \hat{I}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta \hat{I} & a_3 \end{pmatrix}$$

dengan

$$a_1 = -\frac{\beta \hat{I}}{1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2} + \rho_1 - \rho_2$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-\beta S(1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2) + \beta S I(k_1 + 2k_2 \hat{I})}{(1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2)^2} \\ &+ \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\beta S(1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2) - \beta S \hat{I}(k + 2k_2 \hat{I})}{(1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2)^2} \\ &+ \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \beta S(1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2) - \beta S \hat{I}(k + 2k_2 \hat{I}) \\ &= \beta S + \beta S k_1 \hat{I} + \beta S k_2 \hat{I}^2 - \beta S k_1 \hat{I} \\ & \quad - 2\beta S k_2 \hat{I}^2 \\ & \quad \beta S(1 - k_2 \hat{I}^2) \end{aligned}$$

Misalkan  $x = 1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2$ , dan  $y = \beta S(1 - k_2 \hat{I}^2)$ , maka matriks  $J(\hat{S}, \hat{I})$  dapat ditulis ulang sebagai:

$$J(\hat{S}, \hat{I}) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 & \frac{\beta S y}{x^2} + \gamma \\ \frac{\beta \hat{I}}{x} & -\frac{\beta S y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{pmatrix}$$

Sehingga nilai eigen-nilai eigen matriks  $J(\hat{S}, \hat{I})$  dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \left( \lambda - \frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 \right) \\ & \left( \lambda - \left( -\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) \right) \\ & - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta \hat{S} y}{x} + \gamma \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - \left( -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 - \frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \rho_1 \right. \\ & \quad \left. - \rho_2 - \gamma \right) \lambda \\ & + \left( -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 \right) \left( -\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 \right. \\ & \quad \left. - \gamma \right) \\ & - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \gamma \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - \left( -\frac{\beta \hat{I}}{x} - \frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + 2\rho_1 - 2\rho_2 - \gamma \right) \lambda \\ & + \left( -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 \right) \left( -\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 \right. \\ & \quad \left. - \gamma \right) \\ & - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \gamma \right) = 0 \end{aligned}$$

Karena berdasarkan Teorema 3,  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$ , maka

$$A = -\frac{\beta \hat{I}}{x} - \frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + 2\rho_1 - 2\rho_2 - \gamma < 0,$$

$$B = -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 < 0,$$

$$C = -\frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma < 0,$$

$$D = \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \gamma \right) > 0.$$

Diperoleh persamaan karakteristik:

$$\lambda^2 - A\lambda + BC - D = 0$$

sehingga

$$\lambda_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4(BC - D)}}{2}$$

Nilai eigen  $\lambda_{1,2}$  tergantung dari suku  $BC - D$ :

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 \right) \left( -\frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) \\ & \quad - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \gamma \right) \\ &= -\frac{\beta \hat{I}}{x} \left( -\frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) + \\ & (\rho_1 - \rho_2) \left( -\frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) \\ & \quad - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \gamma \right) \\ &= -\frac{\beta \hat{I}}{x} \left( -\frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) \\ & \quad - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \gamma \right) \\ & + (\rho_1 - \rho_2) \left( -\frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) \\ &= -\frac{\beta \hat{I}}{x} (\rho_1 - \rho_2) \\ & \quad + (\rho_1 - \rho_2) \left( -\frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) \end{aligned}$$

Karena  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$ , maka

$$-\frac{\beta \hat{I}}{x} (\rho_1 - \rho_2) + (\rho_1 - \rho_2) \left( -\frac{\beta \hat{S}y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) > 0$$

atau  $BC - D > 0$ .

Dengan demikian kedua nilai eigen  $\lambda_{1,2}$  mempunyai bagian real yang semuanya negatif. Terbukti bahwa titik ekuilibrium endemik  $(\hat{S}, \hat{I})$  stabil asimtotik lokal ketika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$ .

### Simulasi

Dimisalkan nilai-nilai parameter untuk sistem (2) adalah:

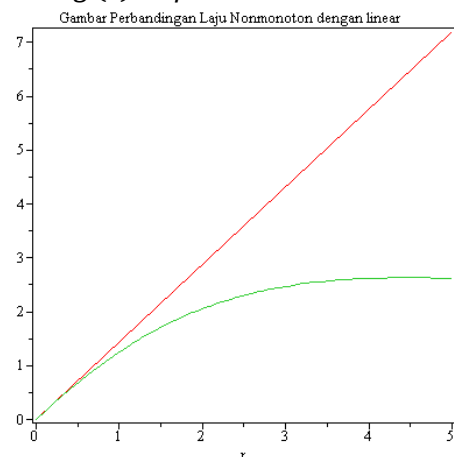
$$a = 1,5; \beta = 1,44; b = 0,05;$$

$$\rho_1 = 1,40; \rho_2 = 1,45; k_1 = 0,10;$$

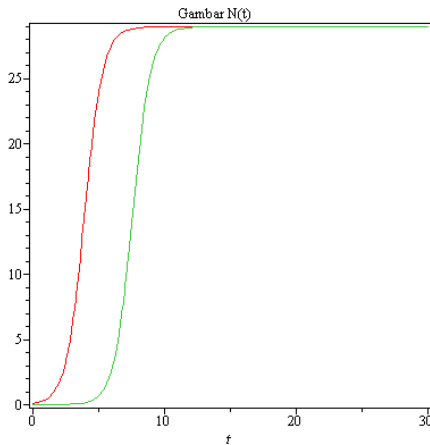
$$k_2 = 0,05; \gamma = 0,80$$

Beberapa hasil yang diperoleh berdasarkan pemberian nilai parameter tersebut diantaranya:

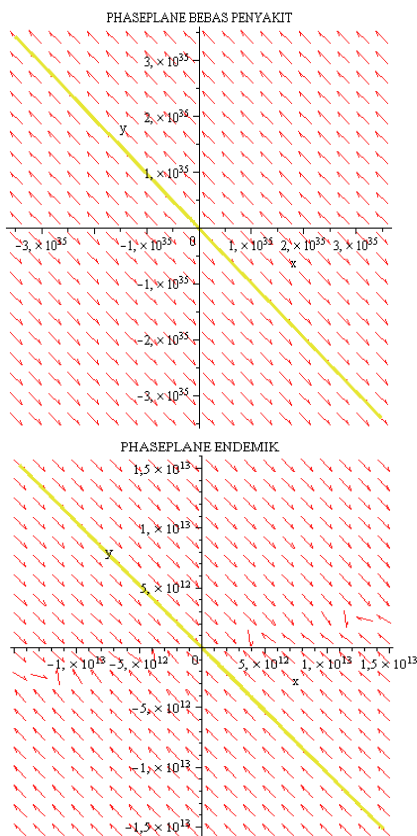
- a. Laju penularan nonmonotone incidence  $g(I) = \frac{\beta I}{1+k_1 I+k_2 I^2}$  jauh lebih lambat dibandingkan dengan laju penularan linear  $g(I) = \beta I$ .



- b. Jumlah kesetimbangan individu pada populasi adalah  $N^* = \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b} = 29$ . Ini adalah jumlah individu pada populasi ketika  $t \rightarrow \infty$  atau  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 29$ .



- c. Titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik berturut-turut adalah  $(S^*, I^*) (29; 0)$  dan  $(\hat{S}, \hat{I}) (22.16; 6.84)$
- d. Nilai  $\rho_1 = 1.40 < \rho_2 = 1.45$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) > b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$  Menurut Teorema 2 titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil. Sementara itu bahwa  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 = 46.7856 > \frac{1}{k_2} = 20$ , dan menurut Teorema 3 titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik.



Terdapat beberapa hasil berbeda dari model (1) dengan model (2), diantaranya:

- Adanya kelahiran dan kematian yang lajunya sama menyebabkan model (1) mempunyai populasi konstan. Akibatnya dengan menghitung berapa jumlah individu rentan pada saat tertentu, jumlah individu sakit dapat segera ditentukan. Hal ini berbeda dengan model (2) yang mengasumsikan pertumbuhan logistik dan adanya migrasi. Asumsi-asumsi tersebut menyebabkan jumlah individu populasi dari model (2) berubah terhadap waktu. Sehingga jika jumlah individu rentan sudah dihitung tidak serta merta jumlah individu sakit dapat ditentukan segera.
- Kedua model memiliki hasil yang sama untuk keberadaan titik ekuilibrium bebas penyakit, yaitu sama-sama menjamin adanya satu titik ekuilibrium tersebut. Titik ekuilibrium endemik model (1) dijamin keberadaannya jika laju kontak penyakit  $\beta$  lebih tinggi daripada laju kematian  $\mu$  ditambah laju kesembuhan  $\gamma$ . Sedangkan model (2) mensyaratkan  $\rho_1 < \rho_2 + \gamma < \rho_1 + \beta N^*$  supaya model memiliki satu titik ekuilibrium endemik.
- Model (1) menjamin titik ekuilibrium bebas penyakitnya stabil asimtotik dan titik ekuilibrium endemiknya akan stabil asimtotik jika  $\hat{I}_1^2 > \frac{1}{k_2}$ . Sedangkan model (2) menjamin titik ekuilibrium bebas penyakitnya stabil asimtotik jika laju imigrasi  $\rho_1$  lebih kecil daripada laju emigrasi  $\rho_2$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) < b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$ . Titik ekuilibrium endemik model (2) stabil asimtotik jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}_1^2 > \frac{1}{k_2}$ .

### KESIMPULAN

Model (2) menjamin keberadaan satu titik ekuilibrium bebas penyakit  $(S^*, I^*) = \left(\frac{a + \rho_1 - \rho_2}{b}, 0\right)$  yang akan stabil asimtotik jika laju imigrasi  $\rho_1$  lebih kecil daripada laju emigrasi  $\rho_2$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) <$

$b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$ . Keberadaan titik ekuilibrium endemik dijamin ada hanya jika  $\rho_1 < \rho_2 + \gamma < \rho_1 + \beta N^*$ , yang akan stabil asimtotik jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}_1^2 > \frac{1}{k_2}$

#### DAFTAR PUSTAKA

- Alexander M.E, Moghadas S.M. **Periodicity In An Epidemic Model With A Generalized Nonlinear Incidence.** *Mathematical Biosciences.* 2004; vol. 189, no. 1, pp. 75–96.
- Capasso V, Serio G. **A Generalization Of The Kermack-Mckendrick Deterministic Epidemic Model.** *Mathematical Biosciences.* 1978; vol. 42, no. 1-2, pp. 43–61, 1978.
- Castillo C., **Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.**, 2000, Canada.
- Chufen Wu, Peixuan Weng, **Stability Analysis of Age Structured SIS Models with General Incidence Rate,** Elsevier, 2009, 11(2010) 1826-1834.
- Gajendra U, Gupta V.K, Singh B, Khandelwal R, and Neetu T. **An Epidemic Model with Modified Non-monotonic Incidence Rate under treatment,** *Applied Mathematical Sciences.*; 2012, Vol. 6, no. 24, 1159 – 1171.
- H.W.Hetchote, **the Mathematics Infectious Diseases,** *SIAM Review,* vol. 42, No. 4 (Dec 2000), pp. 599-653.
- Kar T.K., Ashim B. : **Modeling and Analysis of an Epidemic Model with Non-monotonic Incidence Rate under Treatment,** *Journal of Mathematics Research.* 2010; Vol 2, No. 1, 103-115.
- Linda JS. Allen, **an Introduction to Stochastic Epidemic Models,** Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Lubbock, TX 79409- 1042, USA.
- Perko L., **Differential Equations and Dynamical System,** Springer-Verlag, New York, 1991.
- Soleh, M., **Kestabilan Model SIS dengan Non Monotone Incidence Rate,** *Prosiding SNTIKI 4,* 2012, Pekanbaru, ISSN : 2085-9902.
- Soleh & Siregar, **Kestabilan Equilibrium Model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi,** *Jurnal Sitekin,* vol. 9 No. 2, 2012, Pekanbaru. ISSN 1693-2390.
- Soleh & Helvi, **Model SIS (Susceptible, Infectives, Susceptible) dengan Pertumbuhan Alami dan Proses Migrasi,** Skripsi, 2011, Pekanbaru.
- Xiao D, Ruan S. **Global analysis of an Epidemic model with nonmonotone incidence rate.** *Mathematical Bio sciences.* 2007; vol. 208, no. 2, pp. 419–429.