ANALISA KESTABILAN MODEL EPIDEMI DARI DINAMIKA POPULASI PEROKOK

Riry Sriningsih

Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA UNP, email: srirysriningsih@yahoo.com

ABSTRACT

Epidemic model from dynamics of smoker population is modified by SIR model. In this model, smoking habit of smoker can be transmitted to susceptible because of the negative interaction. That smoking habit can cause various diseases not only for the smoker but also the people who are around. Therefore, this research will discuss about an analysis of the behavior of the population dynamics of smoker. Its purpose is to see the spread of smoking habit that happen in a population so that it can be minimal. Analytical result is obtained 2 kinds of equilibrium points, are free equilibrium point and endemic equilibrium point. Stability of each point is determined by basic reproduction number (R_o).

Keywords: *Basic Reproduction Number, Epidemic Model, Equilibrium Point, Smoker, Stability*

PENDAHULUAN

Aktivitas merokok sering dijumpai hampir di setiap tempat/lokasi. Merokok dianggap dapat memberikan kenikmatan bagi si perokok. Namun di lain pihak, merokok dapat menimbulkan dampak negatif bagi si perokok maupun orang-orang di sekitarnya. Banyak dampak negatif yang ditimbulkan akibat dari kebiasaan merokok, diantaranya penyakit paru-paru, gagal jantung, kecanduan, dll. Hal ini disebabkan karena dalam sebatang rokok mengandung 3 zat utama yang berbahaya bagi tubuh. Zat tersebut adalah tar, nikotin, dan karbon monoksida. **Tar** adalah substansi hidro karbon yang bersifat lengket dan menempel pada paru-paru. **Nikotin** adalah zat adiktif yang mempengaruhi syaraf dan peredaran darah. Zat ini bersifat karsinogen, dan mampu memicu kanker paru-paru yang mematikan. **Karbon monoksida** adalah zat yang mengikat hemoglobin dalam darah, membuat darah tidak mampu mengikat oksigen.

Oleh karena banyaknya dampak negatif yang ditimbulkan dari aktivitas merokok ini, maka perlu dibentuk sebuah model matematika dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu.

Model matematika yang dibentuk adalah model matematika epidemi dari dinamika populasi perokok. Model ini merupakan modifikasi dari model matematika SIR yang diperkenalkaan pertama sekali oleh Kermck-mckendrick pada tahun 1927, Gunawan (2008), dan Zaman (2011). Model SIR membahas tentang penularan penyakit dari individu terinfeksi penyakit kepada individu yang rentan terhadap penyakit tersebut, namun pada model epidemi dari dinamika populasi perokok membahas tentang penularan kebiasaan merokok dari individu perokok kepada individu selain perokok (individu yang rentan untuk menjadi perokok). Cara penularan kebiasaan ini terjadi karena adanya interaksi negatif yang berupa ajakan dari perokok (*smoker*) kepada individu *susceptible* dan diikuti dengan adanya keinginan yang kuat untuk mencoba.

Basic Reproduction Number (Ro) dalam Bauer

Penentuan kestabilan sistem untuk model matematika epidemi, dapat ditentukan melalui nilai atau besaran yang disebut sebagai *basic reproduction number (R_0)*. R_0 didefinisikan sebagai angka harapan banyaknya infeksi kedua pada populasi *susceptible* dan merupakan parameter penting dalam matematika epidemi sebagai ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Jika $R_0 < 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi berkurang, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi bertambah.

Model Matematika yang diperoleh berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier

Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

dengan $E \subset \Re^n$, dan $f : E \to \Re^n$ fungsi kontinu pada *E*. Selanjutnya, dicari titik ekuilibrium sistem dengan definisi berikut:

Definisi 1 (Perko)

Titik $\bar{x} \in \Re^n$ *disebut titik ekuilibrium Sistem (1) jika* $f(\bar{x}) = 0$.

Adapun, perilaku solusi di sekitar titik ekuilibrium Sistem (1) dapat ditentukan melalui linearisasi di sekitar titik ekuilibrium sistem tersebut, berdasarkan definisi berikut

Definisi 2 (Perko)

Diberikan matriks Jacobian

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

maka linearisasi Sistem (1) *disekitar titik* $\bar{x}$ *adalah* $\dot{x} = Jf(\bar{x})x$

Dengan menggunakan matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$, sifat kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x}$ dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik.

Definisi 3 (Perko)

Titik ekuilibrium $\bar{x}$ *disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen* $Jf(\bar{x})$ *mempunyai bagian real tak nol.*

Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz

Kriteria ini menunjukkan adakah akar-akar tak stabil persamaan polinom orde n tanpa perlu menyelesaikannya. Untuk sistem kendali, kestabilan mutlak langsung dapat diketahui dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik. Prosedur:

1. Tulis persamaan orde n dalam bentuk sebagai berikut:
   $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0,\ a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$
2. Jika ada koefisien yang bernilai nol atau negatif disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif (sistem tidak stabil). Kondisi perlu (tetapi belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom bertanda sama
3. Table Routh Hurwitz
   $$\begin{array}{cccc} s^n & a_0 & a_2 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s^0 & g_1 & & \end{array}$$
   dengan koefisien
   $$b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_0 a_{2i+1}}{a_1}, c_i = \frac{b_1 a_{2i+1} - a_1 b_{i+1}}{b_1},$$
   $$d_i = \frac{c_1 b_{i+1} - b_1 c_{i+1}}{c_1}, \dots \& \ i = 1,2, \dots$$
4. Kriteria kestabilan Routh Hurwitz: banyaknya akar tak stabil sama dengan banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh Hurwitz

Syarat perlu dan cukup untuk stabil adalah semua koefisien persamaan karakteristik dan semua suku pada kolom pertama tabel Routh Hurwitz bertanda sama

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis) dengan mengkaji dan memodifikasi jurnal yang telah ada. Teori-teori yang relevan pada tulisan ini adalah sistem persamaan diferensial, linierisasi sistem, titik ekuilibrium dan kestabilan. Titik ekuilibrium model ditentukan dengan menganalisis sistem persamaan diferensial model. Selanjutnya kestabilan titik ekuilibrium tersebut diselidiki dengan menggunakan kriteria nilai eigen (Routh Hurwitz).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model

Pada model dinamika populasi perokok ditentukan beberapa asumsi sebagai berikut:

a. Populasi konstan dan tertutup
b. Populasi dibagi atas 3 kelompok dasar yaitu populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok (P), populasi perokok (S) dan populasi yang telah berhenti merokok (Q)
c. Populasi perokok dibedakan menjadi 3 kelompok yaitu perokok ringan (S_1), perokok sedang (S_2) dan perokok berat (S_3)
d. Perokok adalah orang yang merokok sedikitnya 1 batang/hari selama sekurang-kurangnya 1 tahun
e. Potensial menjadi perokok adalah orang yang belum pernah mencoba rokok dan pernah mencoba tetapi tidak rutin merokok sebanyak 1 batang/hari selama 1 tahun
f. Perokok ringan adalah orang yang mengkonsumsi rokok antara 1 – 10 batang/hari, perokok sedang adalah orang yang mengkonsumsi rokok antara 11 – 20 batang/hari dan perokok berat adalah orang yang mengkonsumsi rokok lebih dari 20 batang/hari
g. Seseorang yang sudah berhenti dari kebiasaannya merokok dimungkinkan untuk dapat kembali menjadi orang yang berpotensi menjadi perokok
h. Setiap individu yang baru masuk ke sistem diasumsikan berpotensi menjadi perokok
i. Adanya kematian pada masing-masing populasi yang disebabkan karena pengaruh rokok (berhubungan dengan penyakit yang ditimbulkan oleh rokok)
j. Adanya kematian alami
k. Penularan kebiasaan merokok terjadi karena adanya interaksi antara populasi yang berpotensi menjadi perokok dengan populasi perokok serta adanya unsur ajakan yang kuat dan keinginan untuk mencoba dari populasi yang berpotensi menjadi perokok tersebut
l. Populasi yang berpotensi menjadi perokok dapat menjadi perokok mulai dari menjadi perokok ringan, sedang dan selanjutnya berat.

Adapun variabel pada penelitian ini adalah jumlah total populasi (N), populasi yang berpotensi menjadi perokok (P), populasi perokok ringan (S_1), populasi perokok sedang (S_2), populasi perokok berat (S_3), populasi yang telah berhenti dari kebiasaan merokok (Q) dan waktu (t). Parameternya adalah

$b =$ tingkat kelahiran

$\beta_1 =$ tingkat penularan kebiasaan merokok dari populasi perokok ringan ke populasi yang berpotensi menjadi perokok

$\beta_2 =$ tingkat penularan dari populasi perokok sedang ke populasi perokok ringan

$\beta_3 =$ tingkat penularan dari populasi perokok berat ke populasi perokok sedang

$\gamma_1 =$ tingkat berhenti dari kebiasaan merokok pada populasi perokok ringan

$\gamma_2 =$ tingkat berhenti dari kebiasaan merokok pada populasi perokok sedang

$\gamma_3 =$ tingkat berhenti dari kebiasaan merokok pada populasi perokok berat

$\mu =$ tingkat kematian alami masing-masing populasi

$d_1 =$ tingkat kematian dari populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$d_2 =$ tingkat kematian dari populasi perokok ringan yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$d_3 =$ tingkat kematian dari populasi perokok sedang yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$d_4 =$ tingkat kematian dari populasi perokok berat yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$d_5 =$ tingkat kematian dari populasi yang telah berhenti dari kebiasaan merokok yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$\delta =$ tingkat penurunan kesadaran untuk tidak merokok lagi (perokok yang sudah berhenti dari kebiasaan merokok menjadi berpotensi kembali menjadi perokok)

$c =$ rata-rata banyaknya kontak tiap satuan waktu

$q =$ peluang individu menjadi perokok (ringan, sedang dan berat)

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas dapat diformulasikan modelnya sebagai berikut:

$$\frac{dp}{dt} = b - \beta_1 p s_1 + \delta q - (\mu + d_1)p \qquad (2)$$

$$\frac{ds_1}{dt} = \beta_1 p s_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)s_1 \qquad (3)$$

$$\frac{ds_2}{dt} = \beta_2 s_1 s_2 - \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3)s_2 \qquad (4)$$

$$\frac{ds_3}{dt} = \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_3 + \mu + d_4)s_3 \qquad (5)$$

$$\frac{dq}{dt} = \gamma_3 s_3 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5) \qquad (6)$$

$$p(t) + s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + q(t) = 1 \qquad (7)$$

dan daerah penyelesaian

$$\Omega = \left\{(p, s_1, s_2, s_3, q) \middle| \begin{matrix} p \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, q \geq 0, \\ p + s_1 + s_2 + s_3 + q \leq n \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

Eksistensi dan Kestabilan Titik Ekuilibrium Model

Teorema 1:

a. $E_0 = \left(\frac{b}{\mu + d_1}, 0,0,0,0\right)$ merupakan titik ekuilibrium bebas dari kebiasaan merokok

b. $E_1 = (p, s_1, 0,0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 1 dengan

$p = \frac{\gamma_1 + \mu + d_2}{\beta_1} = \frac{1}{R_{01}}$,

$s_1 = \frac{(\mu + \delta + d_5)(\mu + d_1 - R_{01} b)}{\delta \gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu + \delta + d_5)}$,

$q = \frac{\gamma_1(\mu + d_1 - R_{01} b)}{\delta \gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu + \delta + d_5)}$.

c. $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 2 dengan

$$p = (b + \delta q)\varphi$$

$$s_1 = \frac{\gamma_2 + \mu + d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01} b \varphi - 1]$$

$$\left(1 + \frac{\varphi \delta \gamma_2 \beta_1}{(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2 \beta_1 \varphi \delta}\right) + \frac{\varphi \delta \gamma_1 \beta_1}{R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2 \beta_1 \varphi \delta]}$$

$$q = \frac{\gamma_1 R_{01} \beta_2 + R_{02} \gamma_2 \beta_1 (R_{01} b \varphi - 1)}{R_{01} R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2 \beta_1 \varphi \delta]}$$

dan $\varphi = \frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}$

d. $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 3 dengan

$$p = \frac{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}{\beta_1 R_{01} R_{03}},$$

$$s_1 = \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03} m \beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02} R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$s_2 = \frac{\gamma_3 + \mu + d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}},$$

$$s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02} R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)},$$

$$q = \frac{R_{02} R_{03}(\eta - b\psi)(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1) + R_{03}\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_2 R_{02}}{\delta\psi R_{02} R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)},$$

$$\psi = \frac{R_{01} R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}$$

$\eta = \frac{(\mu + d_1)}{\beta_1}$ dan $m = \frac{\mu + \delta + d_5}{\delta \psi \beta_2}$

Lemma 1:

Matriks Jacobian fungsi f dari persamaan (2) sampai (6) di titik $x = (p, s_1, s_2, s_3, q)$, yaitu:

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 s_3 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - \beta_2 s_2 - (\mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - \beta_3 s_3 - (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Teorema 2:

1. Jika $R_0 < 1$ maka nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian di titik E_0 lebih kecil dari nol. Dengan kata lain titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal
2. Jika $R_0 > 1$ maka ada nilai eigen dari matriks Jacobian di titik E_0 lebih besar

dari nol ($\lambda_2 > 0$) sehingga titik ekuilibrium E_0 tidak stabil

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_0))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_0 = \left(\frac{b}{\mu+d_1}, 0,0,0,0\right)$ sebagai berikut:

$$J(f(E_0)) = \begin{bmatrix} -(\mu+d_1) & -\beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) & 0 & 0 & \delta \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu+\gamma_2+d_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu+\gamma_3+d_4) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -(\mu+\delta+d_5) \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{22} = \beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) - (\mu+\gamma_1+d_2)$$

Selanjutnya:

$$\left|\lambda I - J(f(E_0))\right| = 0$$

diperoleh

$$\lambda_1 = -(\mu+d_1)$$
$$\lambda_2 = \left(\beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) - (\mu+\gamma_1+d_2)\right)$$
$$\lambda_3 = -(\mu+\gamma_2+d_3)$$
$$\lambda_4 = -(\mu+\gamma_3+d_4)$$
$$\lambda_5 = -(\mu+\delta+d_5)$$

dapat dilihat bahwa $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4\ dan\ \lambda_5 < 0$ dan $\lambda_1 < 0$ apabila $\frac{\beta_1 b}{\mu+d_1} < \mu+\gamma_1+d_2 \leftrightarrow \frac{\beta_1 b}{(\mu+d_1)(\mu+\gamma_1+d_2)} < 1 \leftrightarrow R_0 < 1$, begitupun sebaliknya.

Interpretasi di titik ekuilibrium E_0:

a) Jika tingkat penularan kebiasaan merokok dari individu perokok kepada populasi yang berpotensi menjadi perokok lebih kecil daripada tingkat kesembuhan (berhenti) dalam populasi, maka dengan bertambahnya waktu populasi akan terbebas dari individu yang merokok (tidak ada lagi individu yang merokok)

b) Jika tingkat penularan kebiasaan merokok dari individu perokok kepada populasi yang berpotensi menjadi perokok lebih besar daripada tingkat kesembuhan (berhenti) dalam populasi, maka dengan bertambahnya waktu populasi orang yang merokok semakin bertambah

Teorema 3:

Titik ekuilibrium E_1 dikatakan stabil apabila $R_0 > 1$ dan $s_1 > 0$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_1))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_1 = (p, s_1, 0,0, q)$ dengan

$p = \frac{\gamma_1+\mu+d_2}{\beta_1} = \frac{1}{R_{01}}$,

$s_1 = \frac{(\mu+\delta+d_5)(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu+\delta+d_5)}$,

$q = \frac{\gamma_1(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu+\delta+d_5)}$

sebagai berikut:

$$J(f(E_1)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$
$$a_{22} = \beta_1 p - (\mu+\gamma_1+d_2)$$
$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\mu+\gamma_2+d_3)$$
$$a_{44} = -(\mu+\gamma_3+d_4)$$
$$a_{55} = -(\mu+\delta+d_5)$$

Selanjutnya,

$$\left|\lambda I - J(f(E_1))\right| = 0$$

dan diperoleh

$$\lambda_1 = a_{33} < 0 \leftrightarrow \beta_2 s_1 < (\mu+\gamma_2+d_3)$$
$$\lambda_2 = a_{44} < 0$$

dan persamaan

$$\lambda^3 - a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 = 0$$

dengan

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{55}$$
$$a_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{55} + a_{22}a_{55} + \beta_1^2 s_1 p$$
$$a_3 = a_{11}a_{22}a_{55} + \delta\gamma_1\beta_1 s_1 + \beta_1^2 s_1 p a_{55}$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$ dan $a_1 a_2 < a_3$. Hal ini dapat terjadi apabila memenuhi $s_1 > 0 \leftrightarrow R_0 > 1$.

Teorema 4:

Titik ekuilibrium E_2 dikatakan stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_2))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$ dengan

$p = (b + \delta q)\varphi,\ \ s_1 = \frac{\gamma_2+\mu+d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}}$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01} b\varphi - 1]$$

$$\left(1 + \frac{\varphi\delta\gamma_2\beta_1}{(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta}\right) + \frac{\varphi\delta\gamma_1\beta_1}{R_{02}[(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

$$q = \frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01} b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]},$$

dan $\varphi = \frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu+d_1)}$ sebagai berikut:

$$J(f(E_2)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$
$$a_{22} = \beta_1 p - (\beta_2 s_2 + \mu + \gamma_1 + d_2)$$
$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\mu + \gamma_2 + d_3)$$
$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$
$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Selanjutnya,

$$|\lambda I - J(f(E_2))| = 0$$

dan diperoleh

$$(\lambda - a_{44})\{\lambda^4 - a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_3\lambda + a_4\} = 0$$

dengan

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{55}$$
$$a_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + \beta_2^2 s_1 s_2 + \beta_1^2 s_1 + a_{55}(a_{11} + a_{22} + a_{33})$$
$$a_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{11} + \beta_1^2 s_1 p a_{33} + a_{55}(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + \beta_2^2 s_1 s_2 + \beta_1^2 s_1 p + \delta\gamma_1\beta_1 s_1)$$
$$a_4 = a_{55}(a_{11}a_{22}a_{33} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{11} + \beta_1^2 s_1 p a_{33}) - \beta_1\beta_2 s_1 s_2 \gamma_2 + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta a_{33}$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$, $a_1 a_2 < a_3$ dan $a_1 a_2 a_3 < a_3^2 + a_1^2 a_4$. Agar hal ini terjadi maka $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$. $s_2 > 0 \leftrightarrow R_0 > 1$.

Teorema 5:

Titik ekuilibrium E_3 dikatakan stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_3))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ dengan

$$p = \frac{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}{\beta_1 R_{01} R_{03}},$$

$$s_1 = \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03} m\beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$s_2 = \frac{\gamma_3 + \mu + d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}},$$

$$s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$q = \frac{R_{02}R_{03}(\eta - b\psi)(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1) + R_{03}\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_2 R_{02}}{\delta\psi R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$\psi = \frac{R_{01}R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}, \eta = \frac{(\mu + d_1)}{\beta_1}\ dan$$

$m = \frac{\mu+\delta+d_5}{\delta\psi\beta_2}$ sebagai berikut:

$$J(f(E_3)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 s_3 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$
$$a_{22} = \beta_1 p - (\beta_2 s_2 + \mu + \gamma_1 + d_2)$$
$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\beta_3 s_3 + \mu + \gamma_2 + d_3)$$
$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$
$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Selanjutnya,

$$|\lambda I - J(f(E_3))| = 0$$

dan diperoleh

$$\lambda^5 - a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 - a_3\lambda^2 + a_4\lambda - a_5 = 0$$

dengan

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{55}$$

$$a_2 = a_{22}a_{33} + a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 + \beta_2^2 s_1 s_2 + (a_{11} + a_{55})(a_{22} + a_{33} + a_{44}) + a_{11}a_{55} + \beta_1^2 s_1 p$$

$$a_3 = (a_{11} + a_{55})(a_{22}a_{33} + a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 + \beta_2^2 s_1 s_2) + (a_{11}a_{55})(a_{22} + a_{33} + a_{44}) + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta + \beta_1 p a_{55} - \beta_1^2 s_1 p(a_{33} + a_{44} + a_{55}) + (a_{22}a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 a_{22} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{44})$$

$$a_4 = (a_{11} + a_{55})(a_{22}a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 a_{22} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{44}) + (a_{11}a_{55})(a_{22}a_{33} + a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 + \beta_2^2 s_1 s_2) + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta(a_{33} + a_{44}) - \beta_1 s_1 \delta \gamma_2 \beta_2 s_2 + \beta_1^2 s_1 p(a_{33}a_{44} - a_{44}a_{55} - a_{33}a_{55}) + \beta_1^2 \beta_3^2 s_2 s_3 s_1 p$$

$$a_5 = (a_{11}a_{55})(a_{22}a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 a_{22} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{44}) + \beta_1 s_{1_{s_2 s_3}} \delta \beta_2 \beta_3 \gamma_3 + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta(a_{33}a_{44}) + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta \beta_3^2 s_2 s_3 - a_{44}\beta_1 s_1 \delta \gamma_2 \beta_2 s_2 + \beta_1^2 s_1 p(a_{33}a_{44}a_{55}) + \beta_3^2 s_1 s_2 s_3 \beta_1^2 p a_{55}$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$, $a_1 a_2 < a_3$, $a_1 a_2 a_3 + a_1 a_5 < a_3^2 + a_1^2 a_4$ dan $\left(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_5 - (a_3^2 + a_1^2 a_4)\right)(a_1 a_4 -$ *a5+a1a2a5−a3a5a1a2−a3>0.* Agar hal ini terjadi maka $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$ dengan syarat $R_0^* > 1$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh, disimpulkan bahwa:

1. Model epidemi dari dinamika populasi perokok adalah sebagai berikut:

$$\frac{dp}{dt} = b - \beta_1 p s_1 + \delta q - (\mu + d_1)p$$

$$\frac{ds_1}{dt} = \beta_1 p s_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)s_1$$

$$\frac{ds_2}{dt} = \beta_2 s_1 s_2 - \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3)s_2$$

$$\frac{ds_3}{dt} = \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_3 + \mu + d_4)s_3$$

$$\frac{dq}{dt} = \gamma_3 s_3 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5)q$$

$$p(t) + s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + q(t) = 1$$

dan daerah penyelesaian

$$\Omega = \left\{ (p, s_1, s_2, s_3, q) \middle| \begin{matrix} p \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, q \geq 0, \\ p + s_1 + s_2 + s_3 + q \leq n \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

2\.

2. Sistem memiliki 2 jenis titik ekuilibrium yaitu titik ekulibrium bebas dari individu perokok dan titik ekuilibrium yang tak bebas dari individu perokok (kebiasaan merokok). Titik tersebut adalah $E_0 = \left(\frac{b}{\mu + d_1}, 0{,}0{,}0{,}0\right)$ merupakan titik ekuilibrium bebas dari kebiasaan merokok, $E_1 = (p, s_1, 0{,}0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 1 (adanya perokok ringan), $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 2 (adanya perokok ringan dan sedang) dan $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 3 (adanya semua jenis individu perokok).
3. Analisa kestabilan titik ekuilibrium tersebut adalah
   a. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium E_0 tidak stabil
   b. Titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $R_0 > 1$ dan $s_1 > 0$
   c. Titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$
   d. Titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$
4. Dinamika model sangat dipengaruhi oleh tingkat interaksi negatif antara individu yang berpotensi menjadi perokok dengan individu perokok, tingkat penurunan kesadaran dari individu yang sudah berhenti merokok dan tingkat kesembuhan (berhenti merokok). Jika tingkat interaksi negatif dan tingkat penurunan kesadaran lebih besar dari tingkat berhenti dari kebiasaan merokok maka populasi

tidak akan pernah bebas dari individu perokok. Begitupun sebaliknya.

DAFTAR PUSTAKA

Gunawan, A. Y dan M. E. Nurtamam. (2008). **Model Dinamik Sederhana untuk Masalah Pening katan Populasi Perokok**. Jurnal Indonesia, Math, vol. 14, pp. 63-72

Zaman, Gul. (2011). **Qualitative Behavior of Giving Up Smoking Model**. Bulletin of Malaysian Mathematical Sciences Society, pp. 403-415

Zaman, Gul. (2011). Research Article **Optimal Campaign in the Smoking Dynamics**

Brauer Fred dkk. (2008). **Mathematical Epidemiology**, Mathematical Biosciences Subseries. Spinger

Perko, L. (1991). **Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer-Verlag, New York

Wiggins, S. (1990). **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. Springer-Verlag, New York

Kocak, H and Hale, K. (1991). **Dynamics and Bifurcations**. Springer-Verlag, New York.

.

.