HUBUNGAN *RADICAL* IDEAL *NULL* DAN IDEAL YANG DIBANGUN OLEH POLINOMIAL KARAKTERISTIK

Yusmet Rizal, Atus Amadi Putra
Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang

ABSTRACT

Cayley-Hamilton theorem states, if C_A (x) is the characteristic polynomial of A, then C_A (A) = 0. This theorem leads us to the null ideal concept of a matrix over a field. If A is a square matrix over field F, then the null ideal of A can be constructed by the characteristic polynomial. This study discusses the ideal null of square matrix over a commutative ring, then also discussed radical relationship with the ideal generated by the characteristic polynomial. This discussion begins with determining the necessary and sufficient condition of a polynomial are in null ideal.

Kata Kunci : *Cayley-Hamilton Theorem, Communitative Ring, Characteristic Polynomial, Null Ideal.*

PENDAHULUAN

Misalkan F suatu Field dan $A \in M_{n\times n}(F)$, *polinomial karakteristik* dari A didefinisikan sebagai $C_A(X) = \det(XI - A)$. Teorema Cayley – Hamilton $C_A(A) = 0$ [2]. Jika $F[X]$ adalah himpunan polinomial atas F dan $A \in M_{n\times n}(F)$, *polinomial minimal* dari A dinotasikan dengan $m_A(X)$ didefinisikan sebagai *polinomial monik* berderajat terkecil sehingga $m_A(A) = 0$ (Perlis, 1958). Secara umum polinomial karakteristik suatu matriks di $Mn\times n$ berbeda dengan polinomial minimalnya, tetapi sama faktor-faktor tak tereduksinya [3]. Untuk pembahasan selanjutnya, setiap penyebutan ring berarti memuat elemen satuan.

Ring Polinomial

Definisi 1:
Misalkan R adalah suatu ring komutatif. *Ring polinomial* atas R dengan variabel indeterminate X didefinisikan sebagai

$$R[X] = \left\{\sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m\right\}.$$

Dua elemen $\sum_{m=0}^{n} a_m\, x^m$ dan $\sum_{m=0}^{n} a_m\, x^m$ di R[x] dikatakan sama jika $a_i = b_i$ untuk setiap bilangan tak negatif i (Gallian, 2010).

Jika $f(X) \in R[X]$, polinomial berderajat hingga n, ditulis $\deg(f(X)) = n$, maka

$$f(X) = \left\{\sum_{m=0}^{n} a_m X^m\right\},$$

dengan $a_n \neq 0$. Jika $a_n = 1$, maka $f(X)$ dikatakan *polinomial monik* berderajat n.
Pada ring $R[X]$ berlaku algoritma Pembagian, yaitu jika $f(X)$, $g(X) \in R[X]$ maka terdapat dengan tunggal polinomial u(X), r(X) $\in R[X]$ sehingga

$$f(X) = u(X)\, g(X) + r(X),$$

dengan $r(X) = 0$ atau $\deg(r) < \deg(g)$ [2]. Selain itu juga berlaku dalil sisa, yaitu jika $a \in R$, maka untuk sebarang $f(X) \in R[X]$ berlaku

$$f(X) = (X - a)q(X) + f(a)$$

untuk suatu $q(X) \in R[X]$, dimana $f(a)$ menyatakan *sisa pembagian* $f(X)$ dengan $(X - a)$. Jika $f(a) = 0$, dikatakan $(X - a)$ membagi $f(X)$ (Gallian, 2010).

Modul

Definisi 2:
Misalkan M dan N adalah modul atas R. Suatu pemetaan $\theta : M \to N$ dikatakan *homomorfisma* jika

(1) $\theta(m_1 + m_2) = \theta(m_1) + \theta(m_2)$,
(2) $\theta(\alpha m) = \alpha\, \theta(m)$,

untuk setiap $m_1, m_2 \in M$ dan $\alpha \in R$.

Definisi 3:
Misalkan M = R-modul dan M_1, M_2 adalah submodul dari M, maka M dikatakan jumlah langsung dari M_1 dan M_2 yang dinotasikan dengan

$$M \approx M_1 \oplus M_2 ,$$

jika $M = M_1 + M_2$ dan $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. M_1 atau M_2 disebut juga *penjumlah langsung* dari M.

Definisi 4:
Misalkan M, M_1 dan M_2 adalah modul-modul atas R. Jika f dan g adalah homomorfisma R-modul, maka barisan

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \rightarrow 0$$

dikatakan
(1) eksaks jika f injektif, g surjektif, dan $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$,
(2) terpisah jika eksaks dan $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ adalah penjumlah langsung dari M.

Teorema 1:
Jika barisan

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \rightarrow 0$$

adalah barisan eksaks pendek dari suatu modul atas R, maka pernyataan berikut ekivalen
(1) Terdapat suatu homomorfisma $\alpha : M \rightarrow M_1$ sehingga $\alpha \circ f = 1_{M_1}$.
(2) Terdapat suatu homomorfisma $\beta : M_2 \rightarrow M$ sehingga. $g \circ \beta = 1_{M_2}$.
(3) Barisan di atas adalah terpisah (split) dan

$$M \cong \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(\alpha)$$
$$M \cong \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(\beta)$$
$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

(Adkins,1992)

Ideal Null

Definisi 5:
Suatu ideal utama yang dibangun oleh a dalam ring komutatif R adalah himpunan

$$Ra = \{ra \mid r \in R\}.$$

Jika R adalah DIU (Daerah Ideal Utama) dan $a \neq 0 \in R$, maka a dapat difaktorkan secara tunggal sebagai

$$a = up_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} ,$$

dimana $p_1, \dots, p_k$ adalah elemen prima berbeda dan u adalah unit.

Jika F suatu field, maka $F[X]$ merupakan suatu DIU. Sebaliknya jika R suatu DIU tapi bukan suatu field, maka ring polinomial $R[X]$ bukan merupakan DIU. Sebab, jika $I = \langle p \rangle$ proper ideal taknol dari R, maka $\langle p, X \rangle$ juga ideal $R[X]$ (Adkins, 1992)

Berikut dikenalkan konsep tentang ideal null. Misalkan R ring komutatif dan $R[X]$ himpunan polinomial atas R dengan variabel indeterminate X. Jika $Mn{\times}n(R)$ himpunan matriks berukuran $n{\times}n$ atas R. Ring $R[X]$ dan $Mn{\times}n(R)$ keduanya merupakan R-Modul, karenanya R-aljabar. Misalkan $A \in Mn{\times}n(R)$ dan $f(x) \in R[X]$, maka

$$f(X) = f_m X^m + f_{m-1} X^{m-1} + \dots + f_0,$$

sehingga

$$f(A) = f_m A^m + f_{m-1} A^{m-1} + \dots + f_0 I.$$

itu jelas bahwa $f(A) \in Mn{\times}n(R)$.

Teorema 2:
Pemetaan θ_A: $R[X] \longrightarrow Mn{\times}n(R)$ dengan

$$\theta_A(f(X) = f(A) = f_m A^m + f_{m-1} A^{m-1} + \dots + f_0 I.,$$

untuk setiap $f(X) \in R[X]$ adalah suatu homomorfisma R-aljabar.

Bukti:
Ambil $f(X)$, $g(X) \in R[X]$ dan α, $\beta \in R$ sebarang, maka

$\theta_A(\alpha f(X) + \beta g(X))$
$= \theta_A(\alpha(f_m X^m + f_{m-1} X^{m-1} + \dots + f_0) + \beta(g_m X^m + g_{m-1} X^{m-1} + \dots + g_0))$
$= \theta_A((\alpha f_m X^m + \alpha f_{m-1} X^{m-1} + \dots + \alpha f_0) + (\beta g_m X^m + \beta g_{m-1} X^{m-1} + \dots + \beta g_0))$
$= \theta_A((\alpha f_m + \beta g_m)X^m + (\alpha f_{m-1} + \beta g_{m-1})X^{m-1} + \dots + (\alpha f_0 + \beta g_0))$
$= (\alpha f_m + \beta g_m)A^m + (\alpha f_{m-1} + \beta g_{m-1})A^{m-1} + \dots + (\alpha f_0 + \beta g_0)I$
$= (\alpha f_m A^m + \alpha f_{m-1} A^{m-1} + \dots + \alpha f_0 I) + (\beta g_m A^m + \beta g_{m-1} A^{m-1} + \dots + \beta g_0 I)$
$= \alpha(f_m A^m + f_{m-1} A^{m-1} + \dots + f_0 I) +$

$\beta(g_m A^m + g_{m-1} A^{m-1} + \ldots + g_0 I)$
$= \alpha f(A) + \beta g(A)$
$= \alpha\, \theta_A(f(X)) + \beta\, \theta_A(g(X))$.

Karena itu θ_A membawa elemen satuan 1 di $R[X]$ ke elemen satuan I di $M_{n\times n}(R)$. $\mathrm{Im}(\theta_A)$ merupakan ring bagian dari $Mn\times n(R)$ yang dibangun oleh R dan A, dan dinotasikan sebagai $R[A]$. Jelas bahwa $R[A]$ merupakan R-aljabar bagian dari $M_{n\times n}(R)$. Jadi

$$\mathrm{Im}(\theta_A) = R[A] = \{f(A) \mid f(X) \in R[X]\}.$$

Mengenai $\mathrm{Ker}(\theta_A)$ berhubungan langsung dengan pendefinisian ideal null.

Definisi 6: (Ideal Null)
Misalkan $A\in M_{n\times n}(R)$, maka kernel dari homomorfisma R-aljabar θ_A dari $R[X]$ $M_{n\times n}(R)$ dikatakan *ideal null* (ideal karakteristik) dari A, dan dinotasikan

$$N_A = \mathrm{Ker}(\theta_A).$$

Ingat bahwa ideal null dari A berbeda dengan ruang null dari A. Ruang null dari A adalah modul bagian dari R^n atas R, yang dinotasikan dengan

$$NS(A) = \{ \xi \in R^n \mid A\xi = O\}.$$

Sedangkan ideal null dari A merupakan ideal di $R[X]$, yang juga merupakan R-modul bagian dari R[X]. Jadi

$$N_A = \{ f(X) \in R[X] \mid f(A) = O\}.$$

Definisi 7:
Misalkan U ideal di R,
(1) Himpunan $\sqrt{U} = \{x\in R \mid x^n\in U$ untuk suatu $n\geq 1\}$ disebut *radical* dari U.
(2) Ideal B dikatakan *prima minimal* dari U, jika:
   a) B adalah ideal prima
   b) $U \subseteq B$
   c) Tidak ada ideal prima B' dari R sehingga $U \subseteq B' < B$ [2].

Teorema 3:
Jika U ideal dari R, maka
(1) $\sqrt{U}$ adalah irisan dari semua ideal prima dari R yang memuat U.
(2) Jika B prima minimal dari U, maka B ideal prima terkecil sehingga $U \subseteq B$.

Teorema 4:
Jika A suatu matriks di $M_{n\times n}(F)$, maka Ideal null dari A adalah sama dengan ideal yang dibangun oleh polinomial karakteristik dari A, yaitu

$$N_A = \langle C_A(X)\rangle$$

Bukti:
Menurut Adkins (1992) jika F field, maka $F[X]$ adalah DIU. Karena N_A ideal di $F[X]$, maka N_A adalah ideal utama. Karena itu N_A terdapat $f(X) \in F[X]$ sehingga $N_A = \langle f(X)\rangle$, jadi $f(A) = 0$. Berdasarkan (Brown,1992) terdapat dengan tunggal polinomial monik yang membangun N_A, yaitu polinomial minimal dari A. Sehingga $m_A(X)$ merupakan faktor dari $f(X)$. Karena itu diperoleh $N_A = \langle m_A(X)\rangle$. Jadi elemen pembangun dari N_A merupakan polinomial minimal dari A. Menurut teorema Cayley – Hamilton $C_A(X) = \det(XI - A) \in N_A$ polinomial monik di $F[X]$, maka $m_A(X)$ membagi C_A (X). Jadi $N_A = \langle C_A(X)\rangle$.

Dengan teorema tidak menunjukkan bahwa polinomial karakteristik dari A sama dengan polinomial minimal dari A. Karena secara umum keduanya merupakan konsep yang berbeda. Brown(1993) menyebutkan bahwa jika $A \in M_{n\times n}(F)$ dengan F suatu field, maka faktor taktereduksi dari keduanya sama (Brown,1992).

Pada penelitian ini field F diperumum menjadi sebarang ring komutatif untuk melihat hubungan ideal null dan polinomial karakteristik dari suatu matriks atas sebarang ring komutatif, yaitu untuk matriks $A \in M_{n\times n}(R)$ dengan R adalah ring komutatif.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dimulai dari hasil studi pustaka dengan mempelajari beberapa karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal, bulletin ataupun buku. Dari data-data atau konsep yang telah dikumpulkan, dilakukan proses analisis dengan cara menghubungkan satu atau beberapa konsep dengan kaidah matematika yang benar. Kemudian merumuskan suatu konsep yang diperoleh dari hasil hubungan tersebut. Sehingga diperoleh hasil berupa teori tentang hubungan radical ideal null dari sebuah matriks atas sebarang ring komutatif dan ideal yang dibangun oleh polinomial karakteristik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan R suatu ring komutatif dan $A\in M_{n\times n}$(R), maka $C_A(X) \in R[X]$. Menurut teorema Cayley-Hamilton C_A(A) = 0. Jadi C_A(A)$\in$ N$_A$. Jadi $N_A \neq \emptyset$. Seperti yang disebutkan pada bagia pendahuluan NA, $R[X]$, dan $R[A]$ merupakan modul atas R.

Teorema 1:
Jika kita misalkan ι**:** $N_A \longrightarrow R[X]$ pemetaan inklusi maka barisan
$$O \longrightarrow N_A \xrightarrow{\iota} R[X] \xrightarrow{\vartheta_A} R[A] \longrightarrow O \quad (1)$$
adalah barisan eksaks dari R-modul.

Bukti
Karena ι pemetaan inklusi, maka jelas injektif dan Im(ι) = N$_A$ = Ker(θ_A). Sementera
Im(θ_A) = R[A], yaitu θ_A surjektif. Maka jelas menurut definisi 4 barisan (1) di atas eksaks.

Teorema 2:
Misalkan $A\in M_{n\times n}(R)$ dan $g(X) \in R[X]$, maka $g(X)\in N_A$ jika dan hanya jika $g(X)$ adj$(XI - A) = K\, C_A(X)$ untuk suatu $K\in Mn\times n$(R[X]).

Bukti
Misalkan $A\in M_{n\times n}(R)$ dan terdapat matriks $K\in M_{n\times n}$(R[X]) sedemikian sehingga
$$g(X)\,\text{adj}(XI - A) = K\, C_A(X).$$
Dengan mengalikan kedua ruas dengan $(XI - A)$ diperoleh
$$C_A(X)\, g(X)\, I = C_A(X)\, K\, (XI - A). \quad (2)$$
Melalui isomorfisma kanonik
$$\psi : M_{n\times n}(R[\mathrm{X}]) \cong (M_{n\times n}(R))[\mathrm{X}],$$
kita dapat memandang persamaan (2) sebagai polinomial-polinomial di ($M_{n\times n}(R)$)[X].
$$\psi\,(C_A(X)\, g(X)\, I) = \psi(C_A(X)\, K\, (XI - A))$$
atau
$$\psi(C_A(X)\, I)\, \psi(g(X)I) = \psi(C_A(X)I)\, \psi(K)\, \psi(XI - A).$$
Sehingga diperoleh
$$\psi(C_A(X)\, I)\, [\psi(g(X)I) - \psi(K)\, \psi(XI - A)] = 0.$$
Karena C_A(X) adalah suatu polinomial monik, maka $C_A(X)\, I$ elemen regular di $M_{n\times n}(R[\mathrm{X}])$. Karena ψ adalah isomorfisma maka $\psi(C_A(\mathrm{X})\mathrm{I})$ juga elemen regular di $(M_{n\times n}(R))[X]$. Jadi
$$\begin{aligned}\psi(g(X)I) &= \psi(K)\, \psi(XI - A)\\ &= \psi(K)\, (IX - A)\\ &= \psi(K)\, (X - A).\end{aligned}$$
Jadi $\psi(g(X)I)\in(M_{n\times n}(R))[X]$, dimana $(X - A)$ merupakan pembagi kanan dari $\psi(g(X)I)$. Sekarang dimisalkan
$$g(X) = g_m X^m + g_{m-1} X^{m-1} + \ldots + g_1 X + g_0,$$
Maka
$$\psi(g(X)I) = (g_m I) X^m + (g_{m-1} I) X^{m-1} + \ldots + (g_1 I) X + g_0 I \in (M_{n\times n}(R))[X].$$
Misalkan $\psi(g(X)I) = P(X)$, koefisien-koefisien dari $P(X)$, yaitu $g_m I, \ldots, g_0 I$ berada dalam senter ring $M_{n\times n}(R)$. Akibatnya $P_L(A) = P_R(A)$. Karena $(X - A)$ pembagi kanan dari $P(X)$, maka $P_L(A) = P_R(A) = 0$. Karena itu diperoleh
$$\begin{aligned}0 = P_R(A) &= (g_m I) A^m + (g_{m-1} I) A^{m-1} + \ldots + (g_1 I) A + g_0 I\\ &= g_m A^m + g_{m-1} A^{m-1} + \ldots + g_1 A + g_0 I = g(A).\end{aligned}$$
Jadi, $g(X) \in N_A$.

Sebaliknya, andaikan $g(X) \in N_A$,maka $g(A) = 0$. Karena itu menurut dalil sisa terdapat $P_R(A)=0$, yaitu $(X - A)$ merupakan pembagi kanan dari $P(X)$ di $(M_{n\times n}(R))[X]$. Sehingga diperoleh
$$\psi(g(X)I) = P(X) = k(X)(X - A)$$
untuk suatu $k(X)\in(M_{n\times n}(R))[X]$. Karena ψ adalah suatu isomorfisma, maka kita dapat

menerapkan ψ^{-1} pada hubungan tersebut, yaitu

$$\psi^{-1}[\psi(g(X)\, I_n)] = \psi^{-1}[\, k(X)\,(X - A)]$$
$$= K\, \psi^{-1}(X - A)$$
$$= K\, \psi^{-1}[\psi(XI_n - A)].$$

Sehingga

$$g(X)I = K\,(XI - A) \in (M_{n\times n}(R))[X],$$

untuk suatu matrik K. Jika kedua ruas kita kalikan dengan adj$(XI - A)$, maka kita peroleh

$$g(X)\ \mathrm{adj}(XI - A) = K\ \det(XI - A) = K\, C_A(X).$$

Ini melengkapi pembuktian teorema.

Secara umum $N_A \neq \langle C_A(X)\rangle$. Tetapi terdapat hubungan antara radical N_A dengan radical $\langle C_A(X)\rangle$, seperti pada teorema berikut.

Teorema 3:
Misalkan $A\in M_{n\times n}(R)$. Maka

$$\sqrt{N_A} = \sqrt{\langle C_A(X)\rangle}\,.$$

Bukti

Misalkan $f(X)\in\sqrt{\langle C_A(X)\rangle}$. Maka $(f(X))^p \in \langle C_A(X)\rangle$ untuk suatu $p\geq 1$. Jadi $(f(X))^p = k\ C_A(X) \in N_A$ untuk suatu $k\in R[X]$, karena menurut teorema Cayley-Hamilton $C_A(X)\in N_A$. Jadi $f(X) \in \sqrt{N_A}$. Karena itu $\sqrt{\langle C_A(X)\rangle} \subseteq \sqrt{N_A}$.

Sebaliknya misalkan $g(X) \in N_A$, menurut teorema 2,

$$g(X)\ \mathrm{adj}(XI - A) = C_A(X)K$$

untuk suatu $K\in M_{n\times n}(R[X])$. Dari teorema itu juga telah didapatkan

$$g(X)I = K\,(XI - A) \in M_{n\times n}(R[X]).$$

Dengan menarik determinannya diperoleh $(g(X))^n = \det(K\,(XI - A)) = \det(K)\det(XI - A) = \det(K)\, C_A(X) \in \langle C_A(X)\rangle$. Karena itu $g(X) \in\sqrt{\langle C_A(X)\rangle}$. Jadi $\sqrt{N_A} \subseteq \sqrt{\langle C_A(X)\rangle}$. Maka dapat disimpulkan bahwa $\sqrt{N_A} = \sqrt{\langle C_A(X)\rangle}$. Dengan kata lain radikal dari ideal $\langle C_A(X)\rangle$ sama dengan radikal dari ideal N_A.

KESIMPULAN

(1) Jika $A \in M_{n\times n}(F)$, maka $N_A = \langle C_A(X)\rangle$
(2) Jika $A\in M_{n\times n}(R)$, maka $g(X) \in N_A$ jika dan hanya jika $C_A(X)$ membagi $g(X)$ dikali dengan masing-masing entri dari adj$(XI - A)$.
(3) Jika $A\in M_{n\times n}(R)$, maka radikal N_A sama dengan radikal $\langle C_A(X)\rangle$.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, William A.,(1992), **Algebra, An Approach Via Module Theory,** Springer-Verlag, New York.

Brown, William C, (1992), **Matrices Over Commutative Rings,Marcel** Dekker, New York.

Cullen, C. G., 1966, **Matrices and Linear Transformations,** Addison-Wesley, London.

Gallian, Joseph A. 2010. Contemporary Abstract Algebra, 7th ed, Brooks/Cole, USA

Perlis, Sam, 1958, **Theory of Matrices**, Addison-Wesley, USA.