

# SOLUSI PERIODIK DAN BIFURKASI PADA *FORCED DUFFING OSCILLATOR*

Muhammad Subhan

Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA UNP

## ABSTRACT

*This article describes a research about dynamical behavior of forced Duffing oscillator, which is compared to the simple one. The dynamical behavior is focussed on existence and stability of periodic solution and bifurcation arising for some external frequencies. We use averaging method and numerically diagnostic support to analyze the dynamics. The results show that there are periodic, quasi-periodic solution, and bifurcation on the forced duffing oscillator.*

**Keywords:** *Dynamical system, forced duffing oscillator, periodic solution, stability, bifurcation*

---

## PENDAHULUAN

Osilasi merupakan fenomena yang banyak terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Fenomena ini bisa dijumpai dalam dinamika struktur gedung, jembatan, molekul zat, detak jantung, rangkaian elektronik, pendulum jam, dan lain-lain. Sebagian besar osilasi yang terjadi itu adalah osilasi taklinear.

Banyak persamaan matematika telah dibuat untuk memodelkan osilasi taklinear. Salah satunya adalah persamaan Duffing yang berbentuk

$$\ddot{x} + x + \alpha x^3 = 0$$

yang dimunculkan pertama kali tahun 1918. Persamaan (osilator Duffing) ini dibuat untuk memodelkan sistem yang memuat gaya reaksi balik, misalnya pegas atau benda elastik lain. Persamaan ini kadang-kadang juga digunakan untuk aproksimasi gerak pendulum.

Dipandang sebagai suatu sistem dinamik, persamaan Duffing merupakan suatu sistem konservatif yang mempertahankan kekekalan energi. Persamaan ini menampilkan fenomena ketakstabilan, keberadaan solusi periodik, bifurkasi terhadap parameter  $\alpha$ , dan pemisahan solusi periodik dan solusi takterbatas oleh separatriks (Rand, 2003).

Pada situasi nyata, osilator Duffing sering berada dalam suatu sistem dimana sub-sistemnya terkait satu sama lain. Misalnya, suatu sistem pegas-massa berupa osilator Duffing dapat terkait dengan pegas lain atau dengan suatu motor gerak dan mengalami redaman. Salah satu situasi yang bisa muncul adalah jika osilator Duffing dengan struktur elastis teredam ditarik dengan gaya eksternal yang cukup besar sehingga efek elastisitas taklinear cukup signifikan. Persamaan yang muncul akan berupa persamaan non-autonomous sehingga dinamikanya mungkin berbeda dengan osilator Duffing yang autonomous. Jadi, masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana perilaku dinamik dari osilator Duffing dengan pengaruh gaya luar dalam konteks perturbasi.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis dimana peneliti mengkaji dan menggunakan teori-teori yang relevan untuk memperoleh jawaban dari permasalahan. Adapun proses kerja yang dilakukan adalah menetapkan bentuk umum *forced duffing oscillator*; menganalisis dinamika sistem yang meliputi keberadaan dan kestabilan solusi periodik, bifurkasi, dan attractor; menggunakan

metode diagnostik dan numerik untuk mendukung hasil analisis; menyimpulkan perilaku dinamik yang terjadi.

Secara umum, osilator duffing yang diberi gaya luar dalam konteks perturbasi berbentuk

### PEMBAHASAN

$$\ddot{x} + x + \varepsilon c \dot{x} + \varepsilon \alpha x^3 = \varepsilon F \cos \omega t \quad (1)$$

dengan  $c, F > 0$ . Parameter  $c$  menyatakan koefisien redaman, parameter  $\omega$  menyatakan frekuensi gaya luar, dan

parameter  $\varepsilon$  berupa bilangan positif kecil yang menyatakan perturbasi.

Bentuk persamaan (1) dapat diubah menjadi bentuk berikut:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-c\dot{x} - \alpha x^3 + F \cos \omega t) \quad (2)$$

Bentuk ini merupakan bentuk khusus dari

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(c\dot{x} - \alpha x^3 + F \cos \omega t) \quad (3)$$

Persamaan (1) dapat juga dipandang dalam bentuk sistem persamaan differensial orde satu, yaitu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(-c\dot{x} - \alpha x^3 - F \cos \omega t) \end{aligned} \quad (4)$$

Karena (4) non-autonomous, yang ditandai dengan suku  $\cos(\omega t)$ , bidang fasenya bukan lagi arena yang mudah diinvestigasi karena medan vektornya pada suatu titik

yang akan diberikan akan berubah seiring perubahan waktu. Sistem (1) dapat dibuat autonomous dengan menaikkan dimensinya menjadi tiga, misalnya menjadi sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon c y - \varepsilon \alpha x^3 + \varepsilon F \cos z \\ \dot{z} &= \omega \end{aligned} \quad (5)$$

Untuk menganalisa dinamika, pemetaan Poincare dapat diandalkan untuk melihat sistem tiga dimensi dalam dua dimensi (Verhulst, 1996), tetapi ini hanya untuk kasus  $F=0$ . Untuk  $F > 0$  diperlukan metode yang lain untuk mengamati dinamika sistem.

Pada pembahasan ini pertama-tama akan diselidiki keujudan dari solusi periodik. Selanjutnya, akan diselidiki kestabilan dan bifurkasi dari solusi periodik yang terbentuk dan kemudian akan

dibandingkan dengan sifat-sifat osilator Duffing.

Misalkan

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} &= -r\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

adalah solusi persamaan (1). Diharapkan, solusi hampirannya juga mendekati bentuk solusi ini.

Dengan menggunakan transformasi di atas pada sistem (4), diperoleh sistem persamaan yang periodik dengan periode  $\frac{2\pi}{\omega}$ , yaitu

$$\dot{r} = - \frac{\varepsilon \sin(\omega t + \varphi) [c r \omega \sin(\omega t + \varphi) - \alpha r^3 \cos^3(\omega t + \varphi) + F \cos(\omega t)]}{\omega}$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{c \cos(\omega t + \phi) [\alpha r \sin(\omega t + \phi) - \alpha r^3 \cos^3(\omega t + \phi) + F \cos(\omega t)]}{r \omega} \quad (6)$$

### 1. Solusi Periodik

Dalam menganalisa dinamika sistem, perlu dilakukan penyederhanaan sistem. Untuk itu, dapat digunakan metode perataan yang mentransformasi sistem ke

bentuk baku metode perataan (Fong, 1999). Dengan menggunakan metode perataan pada persamaan (6), diperoleh sistem berikut

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{c r}{2} - \frac{1}{2\omega} c F \sin(\phi) \\ \dot{\phi} &= -\frac{3\alpha r^3 - 4c F \cos(\phi)}{8\omega r} = \frac{3}{8\omega} \alpha r^2 - \frac{c F \cos(\phi)}{2\omega r} \end{aligned} \quad (7)$$

Dari persamaan (7) diperoleh titik tetap  $P = (r_a, \phi_a)$  yang berkaitan dengan

eksistensi solusi periodik dari (1).  $r_a$  dan  $\phi_a$  memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} \omega c r_a &= -F \sin(\phi_a) \\ \frac{3\alpha}{4} r_a^3 &= F \cos(\phi_a) \end{aligned} \quad (8)$$

Untuk memastikan eksistensi solusi periodik dan melihat kestabilannya, akan dilakukan linearisasi disekitar titik tetap.

Pandang matriks Jacobian untuk sistem (7), yaitu

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} & -\frac{F}{2} \cos(\phi) \\ \frac{3}{4} \alpha r + \frac{F}{2r^2} \cos(\phi) & \frac{F}{2r} \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Linearisasi disekitar titik tetap P akan memberikan matriks Jacobian  $J_P$  yang merupakan evaluasi pada titik P. Dengan

mensubstitusikan persamaan-persamaan (8) diperoleh

$$\begin{aligned} J_P &= \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} & -\frac{F}{2\omega} \cos(\phi_a) \\ \frac{3}{4\omega} \omega r_a + \frac{F}{2\omega r_a^2} \cos(\phi_a) & \frac{F}{2\omega r_a} \sin(\phi_a) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} & -\frac{3\alpha r_a^3}{8} \\ \frac{9}{8} \alpha r_a & -\frac{c}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Nilai eigen dari  $J_P$  diperoleh dari persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + c\lambda + \left( \frac{c^2}{4} + \frac{9\alpha r_a^3}{8\omega} \frac{3\alpha r_a^3}{8\omega} \right) = 0 \quad (11)$$

atau dalam bentuk yang lebih sederhana

$$\lambda^2 + c\lambda + \left( \frac{c^2}{4} + \frac{27\alpha^2 r_a^4}{64\omega^2} \right) = 0 \quad (12)$$

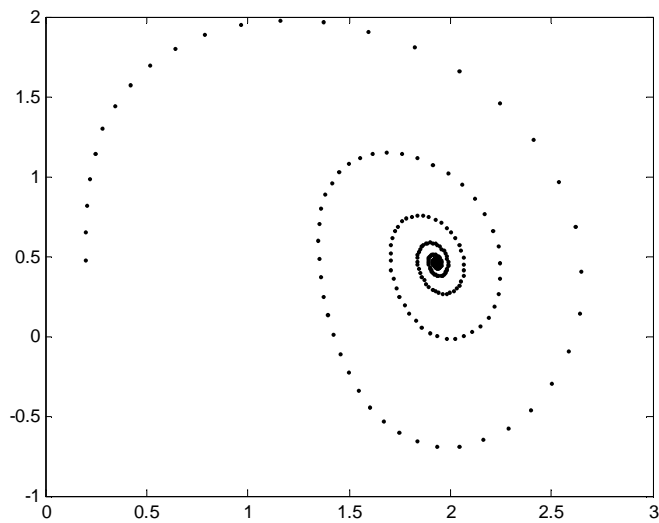
Akibatnya, diperoleh akar-akar karakteristik (nilai eigen) dari matriks  $J_P$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{-27 \frac{\alpha r_a^4}{8\omega}} \quad (13)$$

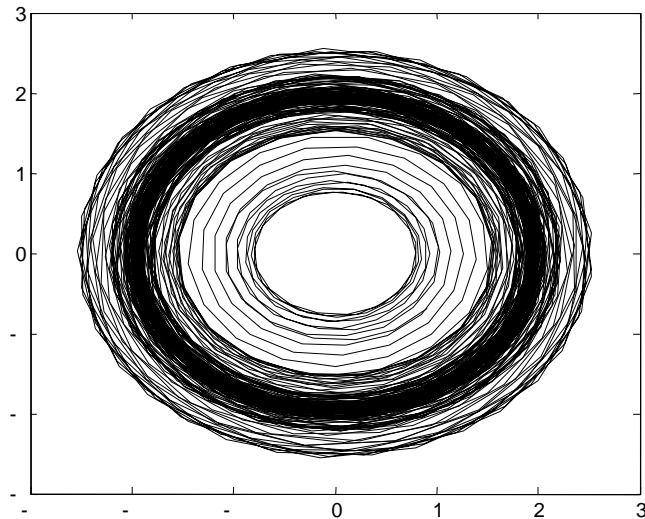
Kedua nilai eigen ini, untuk semua nilai  $\alpha$ , akan memiliki bagian real yang negatif. Jika semua bagian real negatif, maka solusi periodik akan stabil asimtotik untuk  $\varepsilon$  cukup kecil (Sanders, 1985). Jadi, terdapat solusi periodik yang stabil asimtotik dan parameter  $\alpha$  tidak memunculkan bifurkasi pada dinamika sistem.

Solusi periodik terkait dengan lintasan tertutup di bidang fase (Verhulst,

1996) yang kalau diproyeksikan dengan pemetaan Poincare membentuk sebuah titik. Gambar 1 memperlihatkan pemetaan Poincarè yang konvergen ke suatu titik. Ini menunjukkan eksistensi solusi periodik. Sementara Gambar 2 memperlihatkan untuk salah satu nilai awal, solusi hampiran yang periodik, sementara untuk dua nilai awal lain amplitudonya makin membesar.



Gambar 1. Pemetaan Poincare untuk  $\omega=1, c=0,7, \alpha=1, F=6, \varepsilon=0,01$ .



Gambar 2. Potret fase untuk  $\omega=1, c=0,7, \alpha=1, F=6, \varepsilon=0,01$ .

## 2. Tanpa Redaman

Dalam kasus tidak ada redaman atau  $c = 0$ , persamaan menjadi

$$\ddot{x} + x + \varepsilon \alpha x^3 = \varepsilon F \cos(\omega t) \quad (14)$$

Dengan transformasi yang sama dengan sebelumnya, diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{2\omega} \varepsilon F \sin(\varphi) \\ \dot{\varphi} &= -\frac{3\varepsilon \alpha r^5 - 4\varepsilon F \cos(\varphi)}{8\omega r} = \frac{3}{8\omega} \varepsilon \alpha r^2 - \frac{\varepsilon F \cos(\varphi)}{2\omega r} \end{aligned} \quad (15)$$

Dari persamaan (15) diperoleh dua titik tetap  $P_1 = (r_1, 0)$  dan  $P_2 = (r_2, \pi)$  yang berkaitan dengan eksistensi solusi periodik

dari (14) dimana  $r_1 = \sqrt[3]{\frac{4F}{3\alpha}}$  dan  $r_2 = \sqrt[3]{\frac{-4F}{3\alpha}}$  yang masing-masing memenuhi

$$\frac{3}{4} \alpha \omega r_1^3 = F \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \alpha \omega r_2^3 = -F \quad (17)$$

Titik tetap  $P_1$  berkaitan dengan solusi hampiran untuk (14) berupa

$$\dot{x}_1 = -\frac{r_1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_1) = -\frac{\sqrt[3]{4F}}{\omega} \sin(\omega t)$$

sementara titik tetap  $P_2$  berkaitan dengan solusi hampiran

$$x_2 = r_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \sqrt[3]{\frac{-4F}{3\alpha}} \cos(\omega t + \pi)$$

yang jika diturunkan menjadi

$$\dot{x}_2 = -\frac{r_2}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_2) = -\frac{\sqrt[3]{-4F}}{\omega} \sin(\omega t + \pi)$$

Linierisasi disekitar titik  $P_1$  akan memberikan matriks Jacobian  $J_{P_1}$

$$J_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{F}{2\omega} \\ \frac{3}{4\omega} \alpha r_1 + \frac{F}{2\omega r_1^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3\alpha r_1^5}{8} \\ \frac{9}{8} \alpha r_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Nilai eigen dari  $J_{P_1}$  diperoleh dari persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + \frac{27 \alpha^2 r_1^4}{64} = 0 \quad (19)$$

Akibatnya, diperoleh akar-akar karakteristik (nilai eigen) dari matriks  $J_{P_1}$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-27 \frac{\alpha r_1^4}{8}} \quad (20)$$

Kedua nilai eigen ini, untuk semua nilai  $\alpha$ , memiliki bagian real yang nol atau dikatakan memiliki nilai eigen kompleks murni. Hasil ini menunjukkan titik  $P_1$

adalah non-hiperbolik sehingga belum bisa disimpulkan eksistensi solusi periodik yang berkaitan dengan titik tetap  $P_1$ . Untuk itu,

akan digunakan metode diagnostik, yaitu pemetaan Poincaré.

Demikian juga linierisasi disekitar titik tetap  $P_2$  akan memberikan matriks Jacobian  $J_{P_2}$

$$J_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{F}{2\omega} \\ \frac{3}{4\omega} \alpha r_1 - \frac{F}{2\omega r_1^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3\alpha r_1^3}{8} \\ \frac{3}{8} \alpha r_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

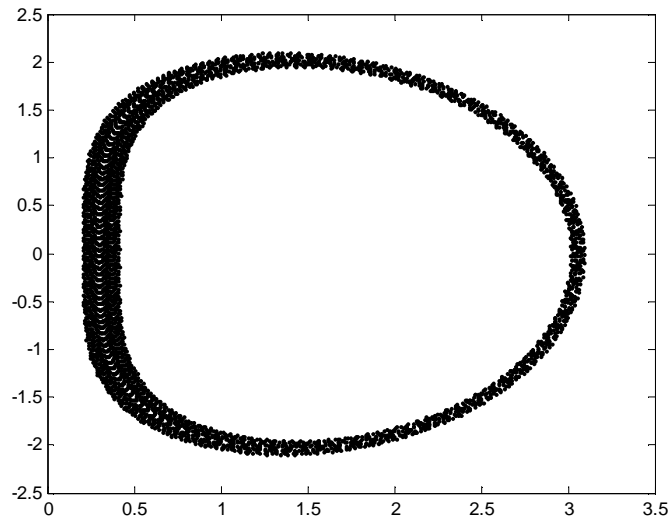
Disini terlihat bahwa  $J_{P_2} = J_{P_1}$  sehingga nilai eigen dari matriks  $J_{P_2}$  juga berupa

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-27 \frac{\alpha r_1^3}{8}} \quad (22)$$

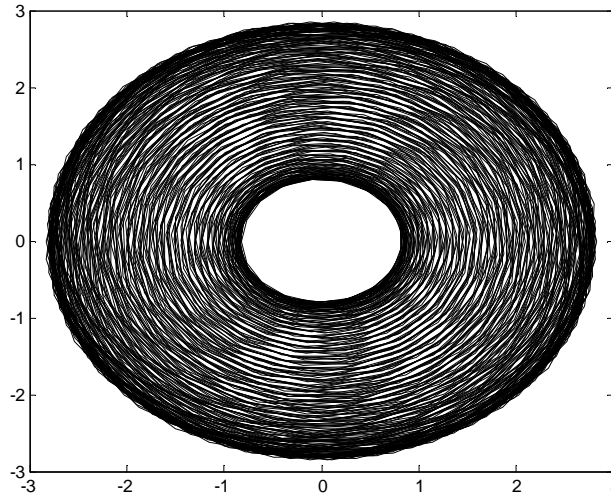
Kedua nilai eigen ini, untuk semua nilai  $\alpha$ , juga memiliki bagian real yang nol sehingga titik  $P_2$  titik non-hiperbolik. Untuk bisa menyimpulkan eksistensi solusi periodik yang berkaitan dengan titik tetap  $P_2$  juga akan digunakan pemetaan Poincaré.

Gambar 3 memperlihatkan, solusi  $(x, \dot{x})$  yang terletak pada jarak  $r = \sqrt[3]{\frac{4F}{3\alpha}}$  dari titik (0,0) bukan merupakan solusi periodik. Pada kasus ini jika diberikan nilai awal  $x(0) = a, \dot{x}(0) = b$  yang terletak pada

lingkaran dengan jarak  $r = \sqrt[3]{\frac{4F}{3\alpha}}$  dari titik (0,0), maka untuk  $t = 2k\pi, k = 1, 2, \dots$  berlaku  $x(2k\pi) \neq a$  dan  $\dot{x}(2k\pi) \neq b$ , namun  $(x(2k\pi), \dot{x}(2k\pi))$  terletak pada lingkaran yang sama. Solusi tersebut merupakan solusi yang hampir periodik (*quasi-periodik*). Jadi, pada kasus tidak ada redaman diperoleh dua solusi quasi-periodik. Potret fase untuk kasus ini dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 3. Pemetaan Poncare untuk  $\omega=1, c=0, \alpha=1, F=6, \varepsilon=0,01$ .



Gambar 4. Potretfase untuk  $\omega=1, c=0, \alpha=1, F=6, \varepsilon=0,01$ .

### 3. Attractor

Pertanyaan berikutnya adalah “*trapping region*” dari sistem ini. Untuk memeriksa keberadaannya, diperlukan suatu fungsi khusus yang disebut fungsi Lyapunov (Hale, 1991). Pandang lagi persamaan (4).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(-cx - \alpha x^3 - F \cos \omega t)\end{aligned}$$

Fungsi Lyapunov yang dipilih dalam hal ini adalah

$$L(x, y) = \frac{y^2}{2} + vxy - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \quad 0 < v < \varepsilon c. \quad (23)$$

Fungsi tingkat  $L(x, y) = C$  akan berbentuk elips untuk  $C$  cukup besar. Misalkan untuk  $C$  cukup besar, kita definisikan suatu daerah

$$D = \{(x, y) | L(x, y) \leq C\} \text{ dan batasnya } \partial D = \{(x, y) | L(x, y) = C\}$$

Maka semua medan vektor sistem (4) akan melewati  $\partial D$  ke arah dalam seperti diperlihatkan berikut

$$\begin{aligned}\nabla L \cdot (\dot{x}, \dot{y}) &= (vy - x + x^3, y + vx) \cdot (y, x - \varepsilon(\alpha x^3 + cy - F \cos(\omega t))) \\ &= vy^2 - xy + x^3y + xy + vx^2 - \varepsilon(\alpha yx^3 + avx^4 + cy^2 + cvxy - yF \cos(\omega t) \\ &\quad - vxF \cos(\omega t)) \\ &= (v - \varepsilon c)y^2 + \varepsilon F \cos(\omega t)(y + vx) + vx^2(1 - \varepsilon \alpha x^2) + x^3y(1 - \varepsilon \alpha) - \varepsilon cvxy \\ &\leq -(\varepsilon c - v)y^2 + \varepsilon F|y + vx| - vx^2(\varepsilon \alpha x^2 - 1) + |x^3y|(1 - \varepsilon \alpha) + \varepsilon cv|xy|\end{aligned} \quad (24)$$

Sepanjang sumbu-y, dimana  $x = 0$ , pernyataan di atas akan berbentuk

$$\nabla L \cdot (\dot{x}, \dot{y}) \leq -(\varepsilon c - v)y^2 + \varepsilon F|y| \quad (25)$$

dimana untuk  $y$  cukup besar, karena  $v < \epsilon c$ , sumbu- $x$ , dimana  $y = 0$ , akan diperoleh akan bernilai negatif. Juga sepanjang

$$\nabla L \cdot (\dot{x}, \dot{y}) \leq \epsilon F |vx| - vx^2 (\epsilon ax^2 - 1) \quad (26)$$

dimana untuk  $x$  cukup besar juga akan bernilai negatif. Ini menunjukkan bahwa  $\nabla L \cdot (\dot{x}, \dot{y}) < 0$  pada  $\partial D$ .

### KESIMPULAN

Secara umum, dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan adanya gaya luar periodik pada osilator Duffing akan mengakibatkan perubahan perilaku dinamik dari persamaan tersebut. Hal ini terutama disebabkan oleh perubahan sistem dari autonomus menjadi non-autonomus. Diantaranya, adalah titik origin (0,0) tidak lagi menjadi titik tetap dan perubahan bifurkasi. Namun demikian, adanya perubahan perilaku dinamik ini tetap mempertahankan sebagian ciri dari osilator Duffing, diantaranya eksistensi solusi periodik pada kasus adanya redaman.

Pada kasus adanya redaman, terdapat satu solusi periodik yang stabil asimtotik. Hal ini juga diperkuat dengan adanya attractor untuk kasus ini. Periode dari solusi periodik ini dipengaruhi oleh frekuensi gaya luar  $\omega$ . Pada kasus ini, tidak ditemukan bifurkasi untuk parameter  $\alpha$ . Sementara untuk kasus tanpa adanya redaman, tidak terdapat solusi periodik. Pada kasus ini terdapat dua solusi quasi-periodik yang berkaitan dengan nilai parameter  $\alpha$ .

### DAFTAR PUSTAKA

- Fong, C. M, dan D. De Kee. (1999). **Perturbation Methods, Instability, Catastrophe, and Chaos**. World Scientific. Singapore.
- Hale, J dan H. Kocak. (1991). **Dynamics and Bifurcations**. Springer. New York.
- Rand, R. (2003). **Lecture Notes on Nonlinear Vibrations**. Cornell University. New York.
- Sanders, J. A, dan F. Verhulst. (1985). **Averaging Methods in Nonlinear Dynamics Systems**. Springer. New York.
- Verhulst, F. (1996). **Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer. Berlin.