

EKSISTENSI DAN KESTABILAN TITIK EQUILIBRIUM MODEL SIR DENGAN *NONLINEAR INSIDENCE RATES*

Mohammad Soleh^{*)} dan Riry Sriningsih^{**)}

^{*)} Staf Pengajar Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN SUSKA RIAU,
email: msoleh1975@yahoo.co.id

^{**)} Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA UNP, email: srirysriningsih@yahoo.com

ABSTRACT

Given SIR epidemic model with nonlinear incidence rate $\beta I^2 S$. We investigated an existences and stability of free equilibrium state and endemic state. We proved that there are one of free equilibrium state with globally stable and two endemic states with locally stable under a condition.

Keywords: *Equilibrium state, nonlinear incidence rate, SIR, stability*

PENDAHULUAN

Model epidemi SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack & Mckendrick pada tahun 1927. Model ini disusun secara deterministik untuk menggambarkan sifat penyebaran penyakit. Model ini merupakan dasar dari munculnya model-model lain seperti SIRS, SEIR, SEIRS, SIS, dan sebagainya. Pada masing-masing model tersebut masih menggunakan laju insidensi penularan penyakit bilinear, yaitu linear dalam IS berbentuk βIS dengan β menyatakan laju kontak perka pita, I menyatakan jumlah individu sakit, dan S menyatakan jumlah individu rentan. Laju insidensi penularan bilinear βIS mengasumsikan homogenitas dalam populasi dan prinsip aktivitas massa, yaitu jumlah kejadian individu rentan menjadi sakit tergantung dari proporsi kelas I .

Pada tahun 1987 Liu, dkk mengajukan bentuk lain laju insidensi penularan penyakit nonlinear yaitu $g(I)S^q = \beta I^p S^q$, dengan p, q bilangan positif, sebagai bentuk umum dari laju insidensi penularan bilinear. Jika $p = q = 1$ maka laju insidensi penularan menjadi bentuk bilinear. Alasan penggantian laju insidensi penularan penyakit βIS menjadi

$\beta I^p S^q$ adalah untuk mengakomodasi kondisi bahwa asumsi homogenitas pada populasi belum tentu valid. Alasan yang lain, adanya pertimbangan efek kejenuhan (*saturation effect*), yaitu jika jumlah sakit sangat tinggi sedemikian hingga individu yang rentan menjadi individu sakit sangat mungkin terjadi maka pada titik tertentu laju insidensi penularan akan menurun.

Penggantian laju insidensi penularan bilinear menjadi nonlinear berbentuk $\beta I^p S^q$, menyebabkan banyak sifat-sifat dinamik yang bisa dipelajari. Korobeinikov dan Maini (2004) mempelajari sifat-sifat dinamik model SIR dan SEIR jika $0 < p \leq 1$ menggunakan fungsi Lyapunov. Sementara itu, Li dan Yu (2006) mempelajari sifat-sifat dinamik model SEIR jika $p > 1$ menggunakan Hopf Bifurkasi. Selanjutnya Li, Wang dan Yu (2010) mempelajari model SEIR untuk $p > 1$ menggunakan fungsi Lyapunov. Lahrous (2011) mempelajari model SIRS menggunakan fungsi Lyapunov untuk $p = 2$

Pada penelitian ini, model yang dibahas adalah model SIR dengan laju insidensi penularan $\beta I^2 S$ dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Dalam hal

ini diselidiki eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik penyakit.

Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan fungsi $x_i : \mathfrak{R}_{+,0} \rightarrow \mathfrak{R}$, x_i diferensiabel pada $\mathfrak{R}_{+,0}$ untuk $i=1,2,\dots,n$, $x : \mathfrak{R}_{+,0} \rightarrow \mathfrak{R}^n$, dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$, dan $f_i : E \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Selanjutnya dibentuk Sistem Persamaan Diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

Dengan kondisi awal

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sistem (1) dapat ditulis menjadi

$$\dot{x} = f(x), \tag{2}$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$,

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dan kondisi awal $x(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

Solusi Sistem (2) diberikan oleh Definisi 1, sedangkan eksistensi dan ketunggalannya dijamin oleh Teorema 1 berikut ini

Definisi 1 (Perko, 1991)

Diberikan $E \subseteq \mathfrak{R}^n$, E terbuka, dan $f_i \in C^1(E, \mathfrak{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vektor $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ disebut penyelesaian Sistem (2) pada interval I jika $x(t)$ diferensiabel pada I dan $\dot{x} = f(x(t))$ untuk setiap $t \in I$ dan $x(t) \in E$.

Teorema 1 (Perko, 1991)

Jika $E \subset \mathfrak{R}^n$, E terbuka, $f_i \in C^1(E, \mathfrak{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$ dan $x_0 \in E$ maka terdapat $a > 0$ sehingga masalah nilai awal $\dot{x} = f(x)$ dengan $x(0) = x_0$

mempunyai penyelesaian tunggal $x(t)$ pada interval $[-a, a]$.

Berikut didefinisikan titik ekuilibrium Sistem (2) dan kestabilannya

Definisi 2 (Perko, 1991)

Titik $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (2.2.2) jika $f(\bar{x}) = 0$.

Definisi 3 (Wiggins, 1990)

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ Sistem (2) dikatakan

- a. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi Sistem (2.2.2) $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ maka berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
- b. Stabil asimtotik lokal jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.
- c. Tidak stabil jika titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ tak memenuhi a.

Jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ stabil global. Sementara itu jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ dan untuk t membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergen ke $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ stabil asimtotik global.

Di bawah ini diberikan sistem persamaan diferensial yang linear dan nonlinear. Diberikan Sistem linear

$$\dot{x} = f(x), \tag{3}$$

dengan $E \subset \mathfrak{R}^n$, dan $f : E \rightarrow \mathfrak{R}^n$ fungsi kontinu pada E . Sistem (3) dapat

dinyatakan dalam bentuk matriks $\dot{x} = Mx$, dengan $x \in E$ dan M matriks ukuran $n \times n$. Diberikan Sistem nonlinear

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

dengan $E \subset \mathfrak{R}^n$, dan $f : E \rightarrow \mathfrak{R}^n$ fungsi kontinu pada E . Perilaku solusi pada sekitar titik ekuilibrium Sistem (4) dapat ditentukan melalui linearisasi pada sekitar titik ekuilibrium sistem tersebut.

Definisi 4 (Kocak, 1991)

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada Sistem (4) dengan $f_i \in C^1(E, \mathfrak{R}), i = 1, 2, \dots, n$. Matriks

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{matrix} a. \\ b. \end{matrix} \quad (5)$$

dinamakan Matriks Jacobian di titik \bar{x} .

Definisi 5 (Perko, 1991)

Diberikan matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$ pada (5). Sistem linear $\dot{x} = Jf(\bar{x})x$, disebut linearisasi Sistem (4) disekitar titik \bar{x} .

Dengan menggunakan matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$, sifat kestabilan titik ekuilibrium \bar{x} dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik.

Definisi 6 (Perko, 1991)

Titik ekuilibrium \bar{x} disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol.

Teorema 2 (Olsder, 1994)

a. Jika matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$ mempunyai $\text{Re } \lambda_i < 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka \bar{x} dari Sistem (4) stabil asimtotik lokal. Jika $\text{Re } \lambda_i \leq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka \bar{x} stabil dan untuk nilai eigen $\text{Re } \lambda_i = 0$ bersesuaian

dengan vektor eigen sebanyak multiplisitas λ_i .

b. Jika terdapat nilai eigen matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$ yang mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari Sistem (4) tak stabil

Fungsi Lyapunov

Definisi 7 (Luenberger, 1979)

Diberikan Sistem (4) dan \bar{x} titik ekuilibriumnya.

fungsi $V : E \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ disebut fungsi Lyapunov jika memenuhi

$$V \in C^1(E, \mathfrak{R})$$

Titik ekuilibrium \bar{x} merupakan titik minimum tunggal

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ untuk setiap } x \in E.$$

Teorema 3 (Luenberger, 1990)

Jika V fungsi Lyapunov dan \bar{x} titik ekuilibrium Sistem (4) sedemikian hingga

- a. V terdefinisi pada \mathfrak{R}^n
- b. $\dot{V}(x) < 0$ untuk setiap $x \neq \bar{x}$
- c. $\|x\| \rightarrow \infty$ berakibat $V(x) \rightarrow \infty$ maka titik ekuilibrium \bar{x} stabil asimtotik global.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis) dengan mengkaji dan mengembangkan jurnal yang telah ada. Teori-teori yang relevan pada tulisan ini adalah sistem persamaan diferensial, linierisasi sistem, titik ekuilibrium dan kestabilan. Titik ekuilibrium model ditentukan dengan menganalisis sistem persamaan diferensial model. Selanjutnya kestabilan titik ekuilibrium tersebut diselidiki dengan menggunakan fungsi Lyapunov atau kriteria nilai eigen.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Pembentukan Model

Populasi dibagi menjadi 3 kelas: kelas S (rentan) menyatakan kelas individu yang

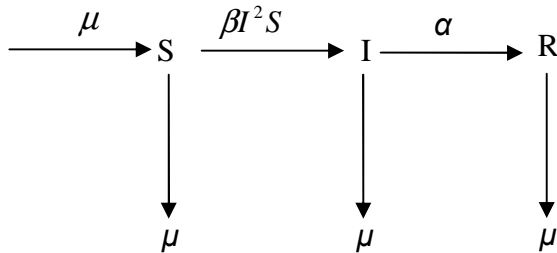
rentan terjangkit penyakit, kelas I (sakit) menyatakan kelas individu yang sudah terjangkit penyakit dan memiliki kemampuan menularkan penyakit ke kelas S . Kelas R (sembuh) menyatakan kelas individu yang telah sembuh dari penyakit dan memiliki kekebalan tetap sehingga tidak masuk dalam kelas rentan lagi. Jika $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ berturut-turut menyatakan proporsi kelas-kelas rentan, sakit dan sembuh pada saat t maka didapat hubungan:

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1$$

Pada penelitian ini diasumsikan:

- Dalam populasi terjadi proses kelahiran dengan laju kelahiran bernilai konstan yaitu $b > 0$ dan proses kematian alami (yaitu kematian yang tidak disebabkan oleh penyakit yang sedang dibicarakan) dengan laju kematian bernilai konstan yaitu $\mu > 0$. Dalam makalah ini diasumsikan bahwa $b = \mu$.
- Laju insidensi penularan penyakit berbentuk $\beta I^2 S$ dengan $\beta > 0$ menyatakan laju kontak perkapita.
- Individu yang telah sembuh memiliki kekebalan yang tetap sehingga tidak masuk ke kelas rentan lagi dengan laju kesembuhan bernilai konstan yaitu $\alpha > 0$.
- Setiap kelahiran masuk ke kelas rentan.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut didapat diagram alir model SIR:



Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut didapat model SIR dengan laju insidensi penularan nonlinear :

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta I^2 S - \mu S, \quad (6.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta I^2 S - (\mu + \alpha) I, \quad (6.b)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R, \quad (6.c)$$

Daerah penyelesaian Sistem (6) adalah himpunan:

$$\Gamma_1 = \{(S, I, R) \in \mathfrak{R}_{+,0}^3 : 0 \leq S, I, R \leq 1, S + I + R = 1\}$$

Karena $R = 1 - I - S$ dapat diketahui setelah I, S ditentukan maka untuk sementara R diabaikan. Misalkan $\delta = \alpha + \mu$, diperoleh 2 Persamaan Diferensial

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta I^2 S - \mu S, \quad (7.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta I^2 S - \delta I, \quad (7.b)$$

Daerah penyelesaian untuk Sistem (7) adalah

$$\Gamma_2 = \{(S, I) \in \mathfrak{R}_{+,0}^2 : 0 \leq S, I \leq 1, S + I \leq 1\}.$$

2. Eksistensi dan Kestabilan titik ekuilibrium Model SIR

Teorema 1

- Sistem (7) mempunyai satu titik ekuilibrium bebas penyakit $Q_0 = (S_0, I_0) = (1, 0)$.
- Sistem (7) memiliki dua titik ekuilibrium endemik $Q^* = (S^*, I^*)$ dan $\hat{Q} = (\hat{S}, \hat{I})$ dengan I^* dan \hat{I} masing-masing merupakan akar positif dari $\frac{\alpha + \mu}{\mu} I^2 - I + \frac{\delta}{\beta} = 0$,

$$\text{dengan } S^* = 1 - \frac{\delta}{\mu} I^*, \quad \text{dan}$$

$$\hat{S} = 1 - \frac{\delta}{\mu} \hat{I}.$$

Bukti:

- Jika $I = 0$, maka dari Persamaan (7.a) diperoleh

$$\mu - \beta I^2 S - \mu S = 0.$$

$$\mu - \beta \cdot 0^2 S - \mu S = 0 \Rightarrow S = 1 \quad (6.a)$$

b. Jika $I \neq 0$, maka dari Persamaan (7.b),
 $\beta I^2 S - \delta I = 0$ dan dari hubungan
 $S + I + R = 1$, $R = \frac{\alpha}{\mu} I$, atau
 $S = 1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I$, diperoleh

$$\begin{aligned} \beta I^2 S = \delta I &\Leftrightarrow \beta I S = \delta \\ &\Leftrightarrow \beta I \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I \right) = \delta \\ &\Leftrightarrow I - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^2 - \frac{\delta}{\beta} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^2 - I + \frac{\delta}{\beta} = 0. \end{aligned}$$

Akar-akar I yang didapat adalah:

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \left(\frac{\alpha + \mu}{\mu} \right) \left(\frac{\delta}{\beta} \right)}}{2} \\ \Leftrightarrow I_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \left(\frac{\alpha + \mu}{\mu} \right) \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta} \right)} \\ \Leftrightarrow I_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{(\alpha + \mu)^2}{\mu \beta}} \\ \Rightarrow I^* &= \frac{\mu \beta + \sqrt{\mu^2 \beta^2 - 4 \alpha^2 \mu \beta - 8 \alpha \mu^2 \beta - 4 \mu^3 \beta}}{2 \beta (\alpha + \mu)}, \\ \text{dan } \hat{I} &= \frac{\mu \beta - \sqrt{\mu^2 \beta^2 - 4 \alpha^2 \mu \beta - 8 \alpha \mu^2 \beta - 4 \mu^3 \beta}}{2 \beta (\alpha + \mu)}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa I^* dan \hat{I} ada, sehingga didapat

$$S^* = 1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \text{ dan } \hat{S} = 1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} \hat{I}. \blacksquare$$

Karena untuk $I \neq 0$ diperoleh $S \neq 0$, daerah penyelesaian Sistem (7) untuk $I \neq 0$ adalah :

$$\Gamma_2^+ = \{(S, I) \in \mathfrak{R}_+^2 : 0 < S, I < 1, S + I \leq 1\} \subseteq \Gamma_2$$

Teorema 2

a. Titik ekuilibrium bebas penyakit $Q_0 = (1, 0)$ stabil asimtotik global.

b. Jika $I^* > \frac{\mu}{\mu + \alpha}$, maka $Q^* = (S^*, I^*)$ stabil asimtotik lokal. Hal yang serupa berlaku untuk $\hat{Q} = (\hat{S}, \hat{I})$.

Bukti :

a. Jika $Q_0 = (1, 0)$. Didefinisikan fungsi $V : \Gamma_2^+ \rightarrow \mathfrak{R}$ dengan rumus:

$$V(S, I) = (S - S^* \ln S) + I \left(1 + \frac{I^*}{I} \right) \quad (8)$$

dengan $(1, 0)$ titik ekuilibrium bebas penyakit. Substitusi $(1, 0)$ ke Persamaan (8) menjadi:

$$V(S, I) = (S - \ln S) + I \quad (9)$$

Akan ditunjukkan V merupakan fungsi Lyapunov pada domain Γ_2^+

V diferensiabel kontinu pada Γ_2^+ Fungsi (9) mempunyai turunan parsial :

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 1 - \frac{1}{S}, \quad (10.a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial I} = 1. \quad (10.b)$$

Fungsi $\frac{\partial V}{\partial S} = 1 - \frac{1}{S} \equiv f(S)$ dan $\frac{\partial V}{\partial I} = 1$, masing-masing adalah fungsi yang kontinu

pada Γ_2^+ , sehingga fungsi V adalah fungsi differensibel kontinu pada Γ_2^+ .

Dengan menyelesaikan Persamaan $\frac{\partial V}{\partial S} = 0$, diperoleh titik kritis yang ternyata sama dengan titik ekuilibrium (1,0).

i. Titik ekuilibrium (1,0) minimum global. Turunan parsial kedua dari $V(S,I)$ adalah

$$\frac{\partial^2 V(S,I)}{\partial^2 S} = \frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial^2 V(S,I)}{\partial^2 I} = 0.$$

Ditunjukkan bahwa (1,0) titik minimum global, yang ekuivalen dengan menunjukkan bahwa $V(S,I)$ merupakan fungsi konveks pada Γ_2^+ .

Matriks Hessian di titik (1,0) dari fungsi V adalah

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Matriks Hessian (11) semidefinit positif karena nilai eigen-nilai eigennya $\lambda_1 = 1 > 0$ dan $\lambda_2 = 0$. Diperoleh bahwa $V(S,I)$ fungsi konveks pada Γ_2^+ , sehingga (1,0) merupakan titik minimum global.

$$Jf(S^*, I^*) = \begin{pmatrix} -\beta I^{*2} - \mu & -2\beta I^* S^* \\ \beta I^{*2} & 2\beta I^* S^* - \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\beta I^{*2} - \mu & -2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^*\right) \\ \beta I^{*2} & 2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^*\right) - \delta \end{pmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik $Jf(S^*, I^*)$:

$$\left(\lambda + (\beta I^{*2} + \mu)\right) \left(\lambda - \left(2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^*\right) - \delta\right)\right) + 2\beta^2 I^{*3} \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^*\right) = 0$$

ii. Ditunjukkan $\frac{dV}{dt} \leq 0$ untuk setiap solusi $(S,I) \in \Gamma_2^+$.

Turunan dari V terhadap t

$$\text{yaitu } \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$= \left(\mu - \beta I^2 S - \mu S\right) \left(1 - \frac{1}{S}\right) + (\beta I^2 S - \delta I)$$

$$= \mu - \beta I^2 S - \mu S - \frac{\mu}{S} + \beta I^2 - \mu + \beta I^2 S - \delta I$$

$$= -\left(\mu S + \frac{\mu}{S}\right) + \beta I^2 - \delta I.$$

Misalkan $f(I) = \beta I^2 - \delta I$, maka $f(I) < 0$

untuk $I \in \left(0, \frac{\delta}{\beta}\right)$. Diperoleh bahwa V

merupakan fungsi Lyapunov yang terdefinisi pada Γ_2^+ dan $\frac{dV}{dt} = 0$ hanya

dipenuhi pada titik ekuilibrium (1,0).

Berdasarkan Teorema 3 maka titik ekuilibrium (1,0) stabil asimtotik global.

b. Titik equilibrium endemik (S^*, I^*)

Matriks Jacobi untuk Sistem (3) adalah:

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \left(2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \right) \lambda + (\beta I^{*2} + \mu) \lambda - (\beta I^{*2} + \mu) \left(2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \right) +$$

$$2\beta^2 I^{*3} \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \left(\beta I^{*2} + \mu + \delta - 2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) \right) \lambda - (\beta I^{*2} + \mu) \left(2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \right) +$$

$$2\beta^2 I^{*3} \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) = 0.$$

Akar-akar karakteristiknya dapat dihitung sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\beta I^{*2} + \mu + \delta - 2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\beta I^{*2} + \mu + \delta - 2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) \right)^2 + 4(\beta I^{*2} + \mu) \left(2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \right) - 2\beta^2 I^{*3} \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} & (\beta I^{*2} + \mu) \left(2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \right) - 2\beta^2 I^{*3} \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) \\ &= 2\beta^2 I^{*3} \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \beta I^{*2} + 2\mu \beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \mu - 2\beta^2 I^{*3} \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) \\ &= -\delta \beta I^{*2} + 2\mu \beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \mu \end{aligned}$$

Jika $I^* > \frac{\mu}{\mu + \alpha}$, maka

$$-\frac{1}{2} \left(\beta I^{*2} + \mu + \delta - 2\beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) \right)^2 < 0$$

$$\text{dan } -\delta \beta I^{*2} + 2\mu \beta I^* \left(1 - \frac{\alpha + \mu}{\mu} I^* \right) - \delta \mu < 0,$$

sehingga bagian real akar-akar $\lambda_{1,2}$ adalah negatif. Terbukti untuk $I^* > \frac{\mu}{\mu + \alpha}$, Titik equilibrium endemik stabil asimtotik lokal.

KESIMPULAN

Beberapa kesimpulan yang dapat ditarik dari pembahasan yang telah dilakukan diantaranya:

1. Model epidemi SIR dengan laju insidensi penularan berbentuk $\beta I^2 S$ mempunyai satu titik ekuilibrium bebas penyakit $Q_0 = (1,0)$ dan dua buah titik ekuilibrium endemik $Q^* = (S^*, I^*)$ dan $\hat{Q} = (\hat{S}, \hat{I})$ dengan I^* dan \hat{I} masing-masing merupakan akar positif dari $\frac{\alpha + \mu}{\mu} I^2 - I + \frac{\delta}{\beta} = 0$, dengan $S^* = 1 - \frac{\delta}{\mu} I^*$, dan $\hat{S} = 1 - \frac{\delta}{\mu} \hat{I}$.
2. Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil global, sehingga lama-kelamaan populasi akan terbebas dari penyakit yang dibicarakan.
3. Titik ekuilibrium endemik masing-masing stabil lokal untuk kondisi $I > \frac{\mu}{\mu + \alpha}$, sehingga untuk titik awal yang cukup dekat dengan titik ekuilibrium $Q^* = (S^*, I^*)$ atau $\hat{Q} = (\hat{S}, \hat{I})$, dalam populasi akan selalu ada individu yang terjangkau penyakit.

DAFTAR PUSTAKA

- Kocak, H and Hole, J. K. (1991). **Dynamical and Bifurcation**, New York, Springer-Verlag, New York
- Korobeinikov, A. and Maini, P, K. (2004). **A Lyapunov Function and Global Properties For SIR and SEIR Epidemiological Models With Nonlinear Incidence**, *Mathematical Bioscience and engineering*, Vol. 1 Number 1 pp. 57-60.
- Lahrous, A., Omari, L., dan Kiouach, D. (2011). **Global analysis of a deterministic and stochastic nonlinear near SIRS epidemic models, Non linear Analysis: Model and Control**, Vol. 16 no. 1, pp.59-76
- Li, J., dan Yu, J. (2006). **Global behavior of a SEIR model in epidemiology with nonlinear incidence rates**, *World Journal of Modelling and Simulation*, Vol. 2 No. 3, pp. 143-149
- Li, J., Wang, Y., dan Yu, J. (2010). **Global stability of high dimensional system in epidemiology with nonlinear incidence rates**, *International Journal of Math analysis*, Vol. 4 No. 7, pp. 315-
- Liu, W. M., Hethcote, H. W., and Levin, S. A. (1987). **Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates**, *J. Math. Biology* 25: 359-380.
- Luenberger, D. G. (1979). **Introduction to dynamical system theory, models, an applications**, John Wiley & Sons, Inc, Canada.
- Olsder, G. J. (1994). **Mathematical system theory**, 1st ed, Delft University of Technology.
- Perko, L. (1991). **Differential Equations and Dynamical System**, Springer-Verlag, New York
- Wiggins, S. (1990). **Introduction to applied nonlinear dynamical system and chaos**, Springer-Verlag, New York.