

# KEUNGGULAN PERHITUNGAN *BASIC REPRODUCTION RATIO* DALAM MELAKUKAN ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL PROYEKSI POPULASI BERSTRUKTUR STAGE

Effendi

Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

## ABSTRACT

*There are three known methods available for use in doing analysis on stage structured population model, e.g : matrix norms, spectral radius and basic reproduction ratio. In this paper, we have explained why basic reproduction ratio methods is more convenience for use compared by matrix norm and spectral radius method. We also proposed one method for used in counting basic reproduction ratio, compared with ones counted by Ackleh-Chiquet (2008) and Beck-Lewis (2007).*

**Keywords:** *Matriks proyeksi populasi, kestabilan titik tetap, norma matriks, radius spektral, basic reproduction ratio.*

## PENDAHULUAN

Untuk menganalisis model populasi berstruktur stage, ada tiga pendekatan yang dapat digunakan, yaitu norma matriks, radius spektral dan *basic reproduction ratio*. Misalkan  $Q$  suatu matriks proyeksi populasi. Berdasarkan sifat norma matriks, norma matriks merupakan syarat cukup untuk kestabilan, artinya jika  $\|Q\| < 1$ , maka  $Q^t \rightarrow 0$ . Hal ini merupakan konsekuensi dari sifat norma perkalian matriks  $\|QQ\| \leq \|Q\|\|Q\|$  sehingga  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q^t\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|Q\|^t$ . Karena  $\|Q\| < 1$ , maka  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q\|^t = 0$ . Sehingga haruslah  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q^t\| = 0$ . Akibatnya  $Q^t \rightarrow 0$  dan  $N_t = Q^t N_0 \rightarrow 0$ . Jadi 0 merupakan stabil asimtotik.

Namun demikian, norma matriks tidak sensitif untuk mendeteksi kestabilan titik tetap, karena norma matriks hanya merupakan syarat cukup untuk kestabilan. Jadi, mungkin saja ada  $\|Q\| > 1$  dengan

$Q^t \rightarrow 0$ . Hal ini dapat diatasi oleh radius spektral dari matriks  $Q$  yang ditulis sebagai  $\rho(Q)$  yang merupakan syarat cukup dan perlu untuk kestabilan titik tetap. Berdasarkan Teorema Perron-Frobenius (Langer, 2001) terdapat nilai eigen positif dominan untuk matriks *nonnegative irreducibel* dan *primitive*. Misalkan  $Q$  matriks *nonnegative irreducibel* dan *primitive*. Titik tetap 0 stabil jika hanya jika  $\rho(Q) < 1$ .

Kelemahan penggunaan radius spektral adalah dalam hal penghitungan nilai eigen dominan yang berarti harus memecahkan akar polinomial karakteristik yang tidak selalu mudah. Oleh karena itu, dalam analisis biasanya digunakan *Basic reproduction ratio* ( $B_0$ ), yaitu titik tetap 0 stabil jika hanya jika  $B_0 < 1$ .

Menurut Ackleh, A.S, Chiquet, R.A (2008), *Basic reproduction ratio* ( $B_0$ ) didefinisikan sebagai nilai eigen positif dominan dari matrik  $F(I - P)^{-1}$ , dimana

$F + P = Q$  dengan  $Q$  adalah matriks proyeksi populasi. Matriks  $F$  memuat fekunditas dan matriks  $P$  memuat probabilitas transisi dari matriks  $Q$ .

Karena penghitungan *basic reproduction ratio* oleh Ackleh, A.S, Chiquet, R.A (2008), masih menggunakan nilai eigen positif dominan, maka kesulitan yang sama dalam memecahkan akar polinomial karakteristik masih tetap dihadapi. Oleh karena itu perlu dibuat suatu perumusan *basic reproduction ratio* tanpa penghitungan nilai eigen.

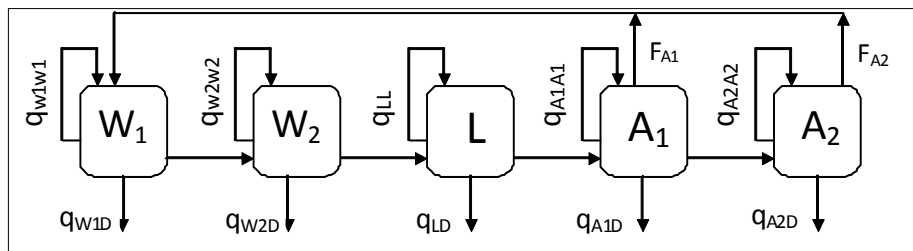
### METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Penelitian dilakukan melalui studi literatur yang berkaitan dengan teori matriks dan aplikasinya. Selanjutnya, informasi

literatur dianalisis menggunakan logika dan perhitungan matematis. Hasil analisis disimulasikan dengan mengambil contoh model proyeksi populasi yang ditawarkan oleh Schaeffer, B, Mondet, B, Touzeau, S, (2008).

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebagai ilustrasi penurunan *basic reproduction ratio* ( $B_0$ ), digunakan model proyeksi populasi berstruktur stage yang dibangun oleh Schaeffer dkk (2008). Model ini menjelaskan tentang dinamika populasi nyamuk *Aedes Africanus* yang memunculkan wabah penyakit kuning (*yellow fever*) di Ivory Coast, Afrika. Model populasi oleh Schaeffer dkk, digambarkan pada diagram berikut :



Gambar 1. Diagram Model Proyeksi Populasi oleh Schaeffer (2007)

Dimana simpul menyatakan fase pertumbuhan, yaitu:

$W_1$  = telur awal,

$W_2$  = telur matang,

$L$  = larva,

$A_1$  = dewasa awal,

$A_2$  = dewasa matang.

Sisi menyatakan probabilitas transisi  $q_{ij}$  untuk  $(i, j = W_1, W_2, L, A_1, A_2)$ , laju mortalitas  $q_{iM}$ , fekunditas dewasa awal dan dewasa matang  $F_{A_1}$  dan  $F_{A_2}$ . Untuk penyederhanaan penulisan dimisalkan

$a = q_{W_1W_1}$ ,  $b = F_{A_1}$ ,  $c = F_{A_2}$ ,  $d = q_{W_1W_2}$ ,  
 $e = q_{W_2W_2}$ ,  $f = q_{W_2L}$ ,  $g = q_{LL}$ ,  $h = q_{LA_1}$ ,  
 $m = q_{A_1A_1}$ ,  $n = q_{A_1A_2}$  dan  $k = q_{A_2A_2}$ . Sehingga model proyeksi populasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$N_t = QN_{t-1}$$

dengan 
$$N_t = \begin{pmatrix} W_{1,t} \\ W_{2,t} \\ L_t \\ A_{1,t} \\ A_{2,t} \end{pmatrix}$$

$$\text{dan } Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & c \\ d & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & k \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan model Schaefer dkk, dengan matriks proyeksi  $Q$  dapat dituliskan matriks fekunditas  $F$  dan matriks  $P$  yang memuat probabilitas transisi dari matriks  $Q$ , yaitu:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_c & F_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & k \end{pmatrix}$$

Dengan menghitung nilai eigen positif dominan matriks  $F(I - P)^{-1}$  diperoleh :

$$B_0 = \frac{dfh(b - bk + cn)}{(1 - e)(1 - a)(1 - g)(1 - k)(1 - m)} \quad (1)$$

dengan  $e \neq 1, a \neq 1, g \neq 1, k \neq 1, m \neq 1$ .

Karena  $B_0$  telah dinyatakan secara eksplisit sebagai fungsi dari entri-entri matriks  $Q$ , maka analisis kestabilan tidak perlu lagi melibatkan penghitungan nilai eigen matriks  $Q$ . Dengan demikian, penggunaan  $B_0$  dalam analisis kestabilan lebih efisien dalam komputasi.

### 1. Metode Interpretasi untuk Penghitungan $B_0$

Metode yang disampaikan ini belum pernah ditemukan dalam berbagai literatur.

Namun, kajian ini berangkat dari interpretasi  $B_0$ . Berdasarkan interpretasi  $B_0$  dalam struktur populasi,  $B_0$  dapat dipandang sebagai rata-rata jumlah keturunan tiap individu yang dapat dihasilkan sepanjang hidup individu itu dalam populasi. Oleh karena itu,  $B_0$  dapat diformulasikan sebagai berikut.

Pandang pada saat awal hanya ada satu individu telur. Misal keadaan awal populasi  $N_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ . Misalkan matriks  $Q$  ditulis sebagai penjumlahan matriks transisi  $P$  dan matriks fekunditas  $F$ , yaitu:  $Q = F + P$ . Maka proporsi individu tiap fase pada waktu  $t$  dapat dihitung sebagai  $P^t N_1$ . Oleh karena itu, jumlah telur yang dihasilkan pada waktu  $t$  adalah  $\|FP^t N_1\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 5} (\sum_{i=1}^5 (fp^t n)_{ij})$ .

Karena  $B_0$  dipandang sebagai rata-rata jumlah keturunan yang dapat dihasilkan sepanjang hidup tiap individu dalam populasi, maka dapat didefinisikan  $B_0$  sebagai banyaknya telur yang dihasilkan dari satu individu semula sepanjang umur individu tersebut. Misalkan maksimum umur individu tersebut adalah  $T$  artinya  $P^t = 0$ , untuk  $t > T$ , maka diperoleh:

$$B_0 = \left\| \sum_{t=0}^T FP^t N_1 \right\|_1$$

Tetapi karena  $P^t = 0$ , untuk  $t > T$ , maka  $\sum_{t=0}^T P^t N_1 = \sum_{t=0}^{\infty} P^t N_1$ . Akibatnya diperoleh

$$B_0 = \left\| F \sum_{t=0}^{\infty} P^t N_1 \right\|_1.$$

Karena nilai eigen dominan dari matriks  $P$  selalu kurang dari 1, maka

$$\sum_{t=0}^{\infty} P^t N_1 = (I - P)^{-1} N_1.$$

Akibatnya,

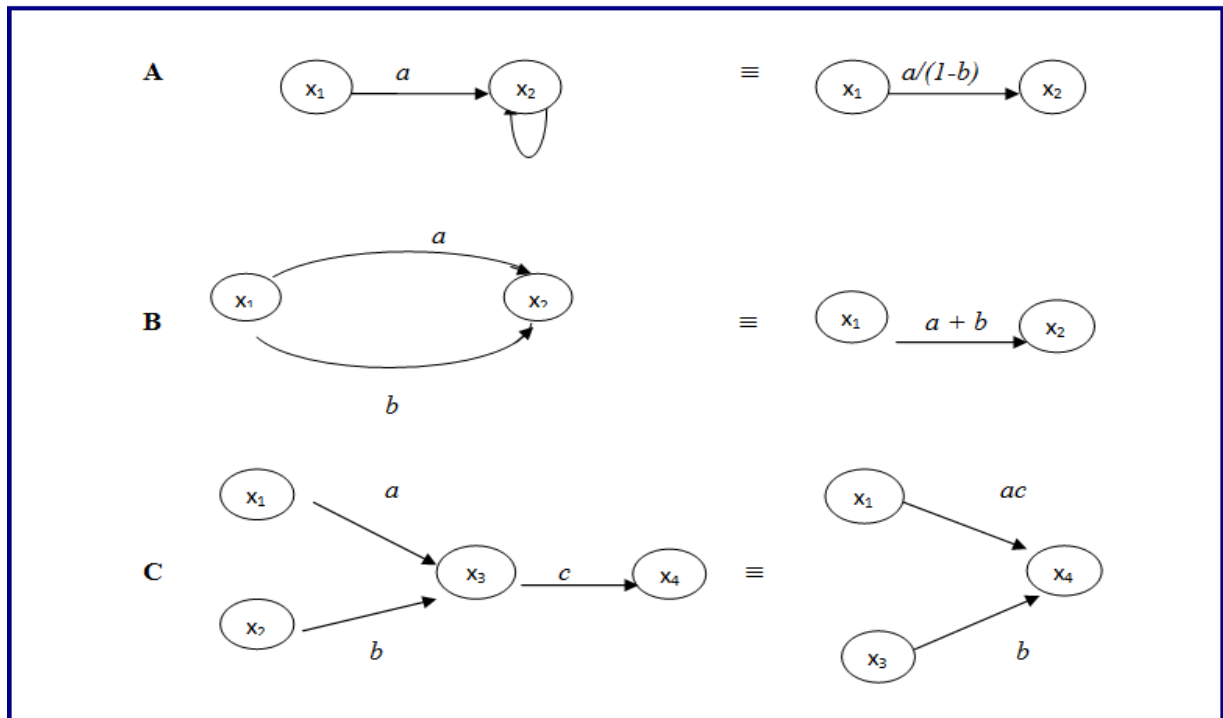
$$B_0 = \|F(I - P)^{-1}N_1\| = \frac{dfh(b - bk + cn)}{(1 - e)(1 - a)(1 - g)(1 - k)(1 - m)} \quad (2)$$

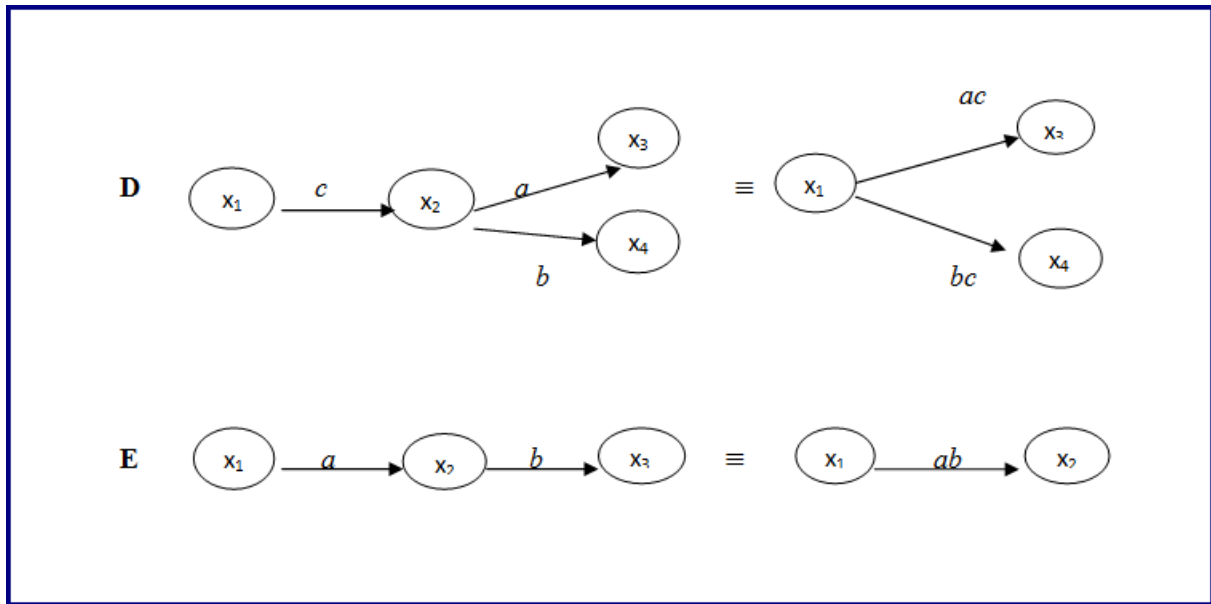
Jadi, diperoleh hasil yang sama dengan perhitungan  $B_0$  menggunakan nilai eigen seperti pada persamaan (1).

Dalam hal ini, jika  $B_0 < 1$ , berarti rata-rata jumlah keturunan yang dapat dihasilkan sepanjang hidup tiap individu dalam populasi kurang dari 1. Akibatnya, terjadi penurunan jumlah individu dalam populasi dari waktu ke waktu. Atau, dalam pengertian lain titik tetap 0 adalah stabil.

## 2. Metode Reduksi Graf untuk Penghitungan $B_0$

Ada beberapa aturan dalam reduksi Graf berdasarkan konsep Mason, sebagai berikut:





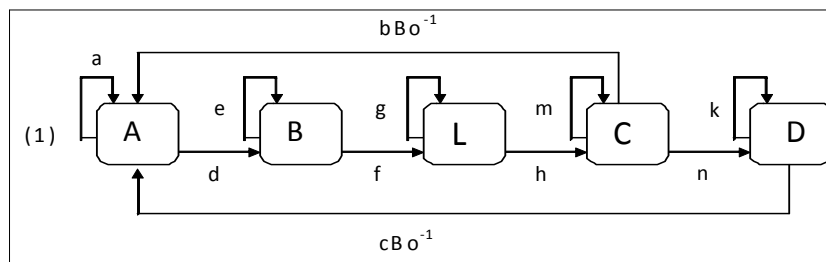
Gambar 2. Aturan Mason (A) Reduksi Loop, (B) Reduksi Paralel, (C), (D) dan (E) Reduksi Simpul  $x_2$

Beck-Lewis (2007) pertama kali menerapkan metode reduksi graf berdasarkan aturan Mason dalam penghitungan  $B_0$  dan menggunakannya untuk menganalisis populasi *Musk Thistle*, tanpa harus memecahkan persamaan karakteristik untuk mendapatkan nilai eigen. Jadi, lebih hemat dalam hal komputasi.

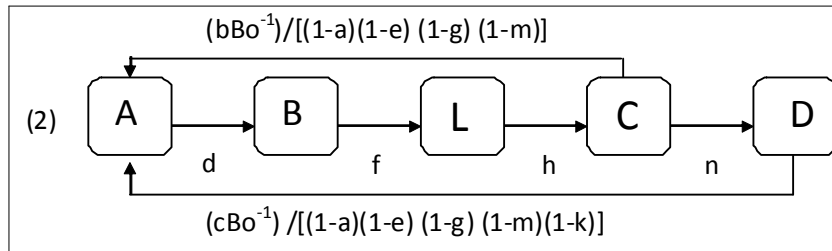
Prinsip dasar metode yang ditawarkan Beck-Lewis (2007) adalah pereduksian graf dengan aturan Mason, sedemikian sehingga tidak merubah sifat kestabilan titik tetap pada sistem yang berkaitan.

Berikut akan digunakan metode Reduksi Graf untuk model populasi versi Schaefer.

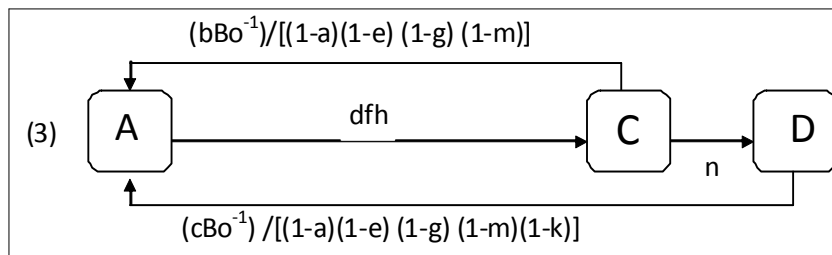
Pertama setiap stage dewasa dikalikan dengan  $B_0^{-1}$ , sehingga diperoleh Graf berikut :



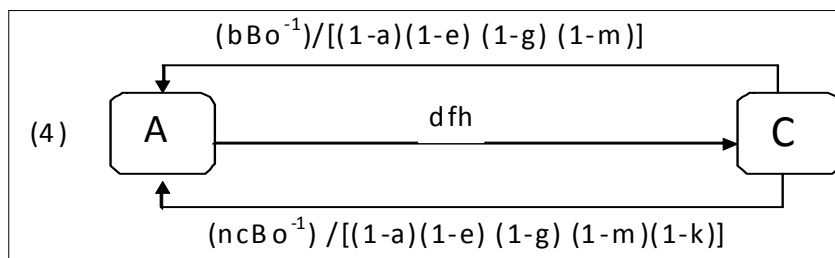
Selanjutnya, direduksi semua loop pada setiap stage, sehingga diperoleh Graf:



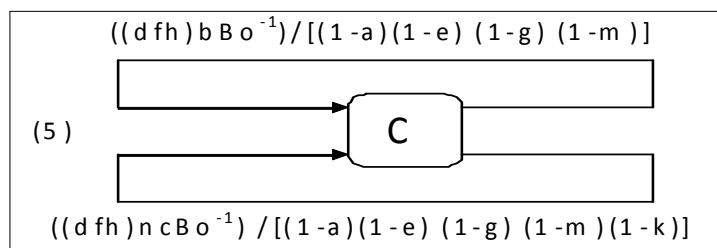
Selanjutnya, direduksi stage B dan L, sehingga diperoleh Graf:



Selanjutnya, direduksi stage C, sehingga diperoleh Graf:



Selanjutnya, direduksi stage A, sehingga diperoleh Graf berikut:



Karena jumlah peluang transisi dari stage C ke stage C adalah 1, maka jumlah semua pe

luang transisi pada stage C adalah:

$$[(dfh)bR_0^{-1}]/[(1-a)(1-e)(1-g)(1-m)] + [(dfh)ncR_0^{-1}]/[(1-a)(1-e)(1-g)(1-m)(1-k)] = 1.$$

Sehingga diperoleh basic reproduction ratio sebagai berikut:

$$B_0 = \frac{dfh(b-bk+cn)}{(1-e)(1-a)(1-g)(1-k)(1-m)}. \quad (3)$$

Jadi, diperoleh hasil yang sama untuk penurunan  $B_0$  menggunakan nilai eigen positif dominan matriks  $F(I-P)^{-1}$  versi Ackleh dkk, persamaan (1) dan versi interpretasi pada persamaan (2).

Kelebihan metode Reduksi Graf adalah penurunan  $B_0$  tanpa perhitungan nilai eigen. Artinya, metode Reduksi Graf lebih hemat dari segi komputasi dibandingkan penurunan  $B_0$  versi Ackleh dkk. Namun demikian, kelemahan metode Reduksi Graf adalah tidak mudah melihat interpretasi  $B_0$  dikaitkan dengan fakta dinamika populasi. Dalam hal ini, penurunan  $B_0$  pada metode alternatif lebih unggul sebab memang setiap langkah penurunan dikaitkan dengan interpretasi pada populasi. Selain itu, penurunan  $B_0$  pada metode alternatif juga tidak melibatkan perhitungan nilai eigen. Jadi, juga lebih hemat dari segi komputasi dibandingkan  $B_0$  versi Ackleh.

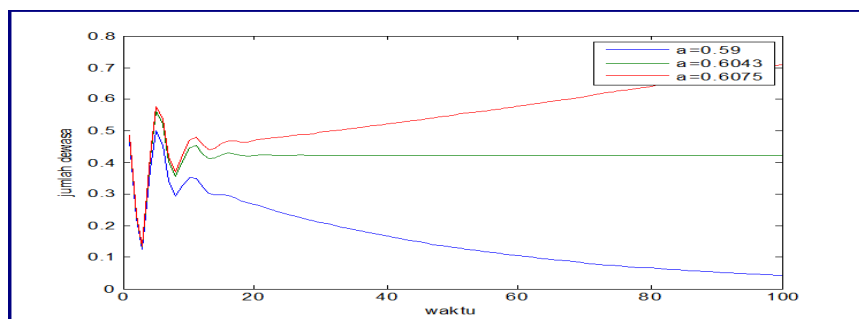
### 3. Contoh Aplikasi

Misalkan pada model Schaefer diperoleh matriks proyeksi populasi sebagai berikut :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.4a & 0 & 0 & F_{A_1} & F_{A_2} \\ 0.5a & 0.3a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6a & 0.2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3a & 0.25a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6a & 0.8a \end{pmatrix}$$

dengan  $a$  suatu faktor pembobot dan fekunditas  $F_{A_1}$  dan  $F_{A_2}$  dapat didefinisikan sebagai  $F_{A_1} = 20 \sin(a)$ ,  $F_{A_2} = 30 \sin(a)$  berkaitan dengan fluktuasi fekunditas terhadap pengaruh alam, basic reproduction ratio berdasarkan persamaan (1), (2) atau (3) dapat dituliskan seperti pada persamaan (4) . Sementara grafik fluktuasi jumlah populasi dapat dilihat pada Gambar 3.

$$B_0 = \frac{(0.5a)(0.6a)(0.3a)(20 \sin(a) - 20(0.8a) \sin(a) + 30(0.6a) \sin(a))}{(1 - (0.4a))(1 - (0.3a))(1 - (0.2a))(1 - (0.25a))(1 - (0.8a))} \quad (4)$$



**Gambar 3.** Fluktuasi Jumlah Populasi Berdasarkan Perubahan Nilai  $a$  atau  $B_0$

Pada Gambar 3, jumlah populasi dewasa konvergen ke 0.4241 untuk  $a = 0.6043$  ( $B_0 = 1$ ) dan konvergen ke 0 (populasi punah) untuk  $a = 0.59$  ( $B_0 = 0.8726 < 1$ ). Sementara untuk  $a = 0.6075$  ( $B_0 = 1.0307 > 1$ ) populasi akan membesar menuju tak hingga.

### KESIMPULAN

Analisis kestabilan titik tetap model proyeksi populasi dapat dilakukan dengan menggunakan norma matriks, radius spektral atau *basic reproduction ratio*  $B_0$ . Kelemahan metode norma matriks adalah tidak sensitif terhadap perubahan nilai norma matriks, yaitu ada  $\|Q\| > 1$ , tetapi  $Q^t \rightarrow 0$ . Metode radius spektral juga mempunyai kekurangan dalam komputasi karena penghitungan nilai eigen positif dominan tidak selalu mudah, karena harus menghitung akar polinomial karakteristik. Dalam hal ini, analisis dengan *basic reproduction ratio*  $B_0$  mempunyai keunggulan dalam komputasi terutama ketika penghitungan  $B_0$  dilakukan dengan menggunakan metode interpretasi ataupun dengan reduksi graf.

Berdasarkan metode interpretasi, nilai  $B_0$  untuk kasus matrik  $Q$  bergantung waktu, dapat diperumum sebagai berikut:

$$B_{0,t} = \left\| \begin{aligned} & \text{FIN}_1 + \text{FP}(1)\text{N}_1 + \text{FP}(2)\text{P}(1)\text{N}_1 + \\ & \text{FP}(3)\text{P}(2)\text{P}(1)\text{N}_1 + \dots + \\ & \text{FP}(t)\dots\text{P}(2)\text{P}(1)\text{N}_1 + \dots \end{aligned} \right\|$$

$$= \left\| \text{FIN}_1 + \text{F} \sum_{t=1}^{\infty} \text{P}(t)\text{P}(t-1)\dots\text{P}(2)\text{P}(1)\text{N}_1 \right\|$$

Dugaan di atas belum dibuktikan secara analitik. Kesulitan pembuktian adalah tidak adanya kriteria kekonvergenan barisan matriks bergantung waktu. Sementara dalam simulasi yang pernah dilakukan untuk matriks  $Q_t$  terlihat bahwa

$\|N_t\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$  untuk  $B_{0,t} < 0.8$ . Jadi, juga perlu dikaji kaitan antara struktur matriks proyeksi dengan nilai ambang untuk  $B_{0,t}$ .

### DAFTAR PUSTAKA

- Ackleh, A.S, Chiquet, R.A, (2008). **The Global Dynamics of a Discrete Juvenile-adult Model. J. Bio. Dyn.**
- Ackleh, A.S, Youssef, M.D, Sophia, R, Jang, J, (2007), **A Three Stage Discrete-time Population Model. J. Bio. Dyn.**
- Beck, T. de C, Lewis, M.A. (2007). **A New Method for Calculating Net Rep. Rate from Graph Reduction with App. to the Control of Inv. Spe.** Bull. Math. Eco.
- Langer, H, (2001). **Matrices With a Strictly Dominant Eigen Value.** Elem. Math.
- Schaeffer, B, Mondet, B, Touzeau, S, (2008). **Using a Climate-dependent Model to Predict Mosquito Abundance: An Application to A. africanus and A. furcifer.** Elsevier.

### LAMPIRAN

Hubungan antara norma matriks dan radius spektral dapat dijelaskan sebagai berikut:

“Perdefinisi radius spektral sebagai nilai eigen maksimal dari matriks  $Q$ . Definiskan norma  $\|\cdot\|_d$  sedemikian sehingga  $\rho(Q) < 1$ , mengakibatkan  $\|Q\| < 1$ . Lakukan faktorisasi *Schurz* pada matriks  $Q$  sehingga diperoleh  $Q = RSR^T$ , dengan  $R$  matriks ortogonal dan  $S$  matriks segitiga atas, dimana nilai-nilai eigen matriks  $S$  sama dengan nilai eigen matriks  $Q$ . Selanjutnya, untuk  $d > 0$ , bentuk matrik diagonal



$D = \text{diag}(d^1, d^2, \dots, d^5)$  sedemikian sehingga  $DSD^{-1}$  merupakan matriks segitiga atas dan entri diagonalnya sama dengan nilai eigen  $Q$  dan  $S$ . Pandang jumlah kolom dari nilai mutlak entri  $DSD^{-1}$ , yaitu

$$|c_j| + \sum_{i=1}^{j-1} d^{-j-i} |s_{ij}|.$$

Karena  $|c_j| \leq \rho(Q)$ , maka untuk  $\varepsilon > 0$ , dengan memilih  $d$  cukup besar, diperoleh

$$|c_j| + \sum_{i=1}^{j-1} d^{-j-i} |s_{ij}| < \rho(Q) + \varepsilon,$$

yang ekuivalen dengan

$$\|DSD^{-1}\| = \max_j \left( |c_j| + \sum_{i=1}^{j-1} d^{-j-i} |s_{ij}| \right) < \rho(Q) + \varepsilon$$

Selanjutnya, definisikan  $\|\cdot\|_d$  untuk matriks  $X$  dengan

$$\|X\|_d = \|(RD^{-1})^{-1} X (RD^{-1})\|_1.$$

Sedemikian sehingga untuk matriks  $Q$  berlaku

$$\begin{aligned} \|Q\|_d &= \|(RD^{-1})^{-1} Q (RD^{-1})\|_1 \\ &= \|DSD^{-1}\| \\ &< \rho(Q) + \varepsilon \end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika  $\rho(Q) < 1$ , maka  $\varepsilon$  dan  $d$  dapat dipilih sedemikian sehingga  $\|Q\|_d < 1$ . Tetapi, jika  $\|Q\| < 1$ , tidak dapat dibatasi nilai  $\rho(Q)$ , sehingga  $\rho(Q) < 1$