TEOREMA KEKONVERGENAN DARI INTEGRAL NON LINEAR HENSTOCK FUNGSI BERNILAI BANACH

Arnelis

Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA UNP

ABSTRACT

A limit function of a sequence of integrable function is also integrable on the same interval and in the same sense and some convergence theorems of Henstock non linear integral of Banach valued function, that is uniform convergence γ_Φ *- convergence.The main result of a research to find out sufficient conditions in order that a limit function of a sequence of integrable function is also integrable Henstock non linear integral in Banach valued function.*

Keywords*: Henstock Non Linear Integral, Banach Valued Function, Uniform Convergence and* γ_Φ *- Convergence*

PENDAHULUAN

Kekonvergenan dari integral telah dikaji oleh para peneliti dari fungsi bernilai real. Di antaranya : Liao (1987) menelaah penghalus konvergensi terkendali inegral Henstock, Gordon (1990) menyusun teorema konvergensi terkendali dengan pendekatan lain, Soedijono (1993) menelaah teorema konvergensi integral Henstock aproksimasi, Bartle (1994) menyusun teorema konvergensi itlak integral Riemann. Darmawijaya (2002) menyusun teorema kekonvergenan Hens tock ke konvergenan fungsi yang terintegral pada suatu selang.

Namun teorema-teorema kekon vergenan tersebut di atas hanya ditinjau dari fungsi bernilai real. Barisan fungsinya berada dalam ruang bernorma, tidak diselidiki apakah ruang bernormanya lengkap. Suatu ruang bernor ma dikatakan lengkap, jika dikaji dalam fungsi bernilai Banach. Kekonvergenan dari integral lebih banyak dan luas kajiannya jika dibahas dari fungsi bernilai Banach. Untuk itu perlu diselidiki jika ruang bernormanya lengkap maka barisan fungsinya berada dalam ruang Banach. Berdasarkan temuan di atas akan diselidiki untuk setiap n berlaku fungsi f_n terintegral pada [a, b] dan barisan fungsi $\{ f_n \}$ konvergen ke f hampir dimana-mana pada [a, b], maka syarat cukup apakah yang diperlukan agar fungsi f juga terintegral pada selang yang sama dan

$$\lim \left(R^*\right)\int_a^b fn(t)dt = \left(R^*\right)\int_a^b \lim fn(t)dt$$

Sebelum membahas teorema kekonvergenan integral non linear Henstock terlebih dahulu dibahas pengertian dan sifat-sifat dasar yang akan digunakan sebagai landasan dalam pemba hasan tentang hasil penelitian. Sebagian materi merupakan materi dari buku-buku analisis yang ada dalam daftar pustaka. Oleh karena itu sifat-sifatnya tidak dibuktikan kecuali dianggap penting.

Partisi δ-fine

Integral Heinstock disusun secara konstruktif berdasarkan pengertian jum lahan Riemann atas suatu partisi yang dibentuk oleh fungsi positif δ pada selang terkait. Partisi tersebut dinamakan partisi δ-fine dan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1 : (Lee, P. Y,1989, h.3)

Diketahui $\delta:[a,b]\rightarrow R$ merupakan fungsi positif. Partisi $D=\{a=a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n=b;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ selang [a, b] yang memenuhi

$$\xi_i-\delta(\xi_i)<a_{i-1}\leq\xi_i\leq a_i<\xi_i+\delta(\xi_i)$$

Untuk semua i = 1, 2, ..., n, disebut partisi δ-fine (δ-fine partition) selang [a, b]. Untuk menyingkat penulisan, partisi D dituliskan dengan $\{([u,v]);\xi\}$, dengan ξ titik ukuran (gauge point) dan [u, v] selang ukuran (gauge integral).

Teorema 2: (Lee, P. Y,1989, h.4)

Untuk sebarang fungsi positif δ pada [a, b] terdapat partisi δ-fine pada [a, b].

Integral Henstock disusun secara konstruktif berdasarkan partisi δ-fine yang eksistensinya dijamin oleh Teorema 2 kemudian dengan menggunakan pengertian fungsi ukuran Φ, disusun pengertian integral non linear Henstock fungsi bernilai Banach.

Untuk selanjutnya agar integral non linear Henstock mempunyai sifat-sifat yang aplikatif dan eksistensinya mudah diperoleh, maka fungsi ukuran Φ perlu memenuhi syarat-syarat :

(N4) Jika diberikan bilangan M > 0 dan bilangan ε > 0 terdapat bilangan η > 0 sehingga berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^{P}\Phi(x_i,I_i)-\sum_{i=1}^{P}\Phi(y_i,I_i)\right\|<\varepsilon$$

asalkan $\|x_i-y_i\|<\eta, \|x_i\|\leq M$ dan $\|y_i\|\leq M$ (i = 1, 2, ..., p) dan $\{I_1, I_2, ..., I_p\}$ partisi bagian di dalam [a, b].

(N5) Jika diberikan bilangan M > 0 dan bilangan ε > 0 terdapat bilangan δ > 0 sehingga berlaku $\left\|\sum_{i=i}^{P}\Phi(x_i,I_i)\right\|<\varepsilon$

asalkan $\{I_1, I_2, ..., I_P\}$ selang-selang tak tumpang tindih di dalam [a, b] dengan $\sum_{i=1}^{P}\mu(I_i)<\delta$ dan $\|x_i\|\leq M$ (i = 1, 2, ..., p)

Suatu fungsi ukuran Φ didefinisikan dengan memenuhi sifat-sifat (N4) dan (N5).

Salah satu konsep yang banyak digunakan dalam pembahasan adalah barisan fungsi konvergen seragam. Barisan fungsi tersebut dapat diperoleh dari barisan fungsi konvergen hampir dimana-mana dan dirumuskan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3 : (Teorema Egoroff, Cao : 1992)

Diketahui fungsi f_n : [a, b] → X setiap n, dan f : [a, b] → X. Jika $\{f_n\}$ konvergen ke f hampir dimana-mana pada [a, b] maka untuk setiap bilangan η < 0 ada himpunan terbuka E dengan μ(E) < η sehingga { f_n } konvergen seragam ke f pada [a, b] – E.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritik atau penelitian kepustakaan, dimulai dengan mempelajari beberapa karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal, ataupun buku. Hasilnya disajikan dalam bentuk teori integral yang memuat definisi-definisi dan teorema-teorema yang dilengkapi bukti.

Adapun konsep kerjanya sebagai berikut :

1. Menentukan barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi f hampir dimana-mana pada selang [a, b].
2. Menentukan barisan fungsi $\{f_n\}$ terintegral non linear Henstock pada selang [a,b].
3. Menyelidiki syarat cukup agar f terintegral non linear Henstock pada selang [a,b].
4. Menyelidiki kekonvergenan barisan fungsi yang terintegral non linear Henstock.

Membuktikan bahwa fungsi f terintegral non linear Henstock sama dengan limit barisan fungsi yang terintegral non linear Henstock.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Integral Non Linear Henstock

Integral Henstock disusun secara konstruktif berdasarkan partisi δ-fine yang eksistensinya dijamin oleh Teorema 2 Kemudian dengan menggunakan penger tian fungsi ukuran Φ, disusun pengertian integral non linear Henstock fungsi bernilai Banach.

Definisi 1

Fungsi f : [a, b] → X dikatakan terintegral Henstock terhadap fungsi ukuran Φ atau terintegral-R_{Φ}^{*} pada [a, b], jika terdapat $A \in X$ sehingga untuk setiap bilangan ε > 0 ada fungsi positif δ pada [a, b] dan berlaku

$$\left\| (D)\sum \Phi\left(f(\xi), [u,v] \right) - A \right\| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi δ-fine D = {([u, v] ; ξ)} selang [a, b] ; (D)Σ menotasikan jumlahan atas semua ([u, v] ; ξ) di dalam D.

A tersebut di atas dinamakan nilai integral fungsi f terhadap fungsi ukuran Φ atau nilai integral-R_{Φ}^{*} fungsi f pada [a, b] dan tunggal adanya.

Selanjutnya ditulis $A = \left(R^{*}\right)\int_{a}^{b} \Phi\left(f(t), dt \right)$, dan

$R_{\Phi}^{*}[a,b]$ menotasikan himpunan semua fungsi terintegral-R_{Φ}^{*} pada [a, b]. umumnya fungsi Φ tidak linear sehingga integral-R_{Φ}^{*} merupakan integral non linear Henstock.

Pada teori integral linear, diketahui jika f dan g terintegral pada [a, b] maka (f + g) juga terintegral pada [a, b]. Akan tetapi, pada integral non linear sifat ini tidak berlaku. Selanjutnya akan dicari syarat cukup agar berlaku, tetapi sebelumnya disusun pengertian fungsi terintegral-R_{Φ}^{*} pada himpunan terukur.

Definisi 2 :

Diketahui $E \subset [a,b]$ terukur. Fungsi f : [a, b] → X dikatakan terintegral-R_{Φ}^{*} pada E jika fungsi $f\chi_E$ terintegral-R_{Φ}^{*} pada [a, b].

Mudah dipahami bahwa

$$\left(R^{*}\right)\int_{E} \Phi\left(f(t), dt \right) = \left(R^{*}\right)\int_{a}^{b} \Phi\left(f\chi_E(t), dt \right).$$

Sebagai ilustrasi, diketahui g(t) = f(t) pada E dan g(t) = θ pada[a, b]-E. jika f terintegral-R_{Φ}^{*} pada E maka g juga terintegral-R_{Φ}^{*} pada [a, b] dan

$$\left(R^{*}\right)\int_{a}^{b} \Phi\left(g(t), dt \right) = \left(R^{*}\right)\int_{a}^{b} \Phi\left(f\chi_E(t), dt \right) = \left(R^{*}\right)\int_{E} \Phi\left(f(t), dt \right)$$

2. Teorema Kekonvergenan

Diketahui f_n fungsi terintegral-R_{Φ}^{*} pada [a, b] untuk setiap n, dan barisan $\{f_n\}$ konvergen ke f hampir dimana-mana pada [a, b], ternyata f tidak terintegral-R_{Φ}^{*} pada [a, b]. Uraian ini memuat pembahasan syarat cukup agar f terintegral-R_{Φ}^{*} pada [a, b] dan

$$\left(R^{*}\right)\int_{a}^{b} \Phi\left(f(t), dt \right) = \lim_{n\to\infty}\left(R^{*}\right)\int_{a}^{b} \Phi\left(f(t), dt \right).$$

Masalah di atas merupakan salah satu aspek yang penting untuk dikaji dalam teori integral dan dikenal dengan masalah kekonvergenan. Penelitian ini hanya dibahas teorema kekonvergenan seragam, dan kekonvergenan-γ_{φ}.

a. Kekonvergenan Seragam

Pada teori integral linear (Henstock) diketahui bahwa teorema kekonvergenan seragam berlaku. Dalam penelitian ini akan ditunjukkan bahwa teorema kekonvergenan seragam masih berlaku pada integral-R_{Φ}^{*}.

Untuk menyingkat penulisan, didaftarkan syarat-syarat berikut :

1) $\{f_n\}$ konvergen ke f hampir dimana-mana pada [a, b].
2) $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada [a, b].
3) Primitif $F_{\Phi,n}$ kontinu mutlak seragam dalam n.
4) Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap selang I di dalam [a, b] dengan $\mu(I) < \delta$, berlaku

$$\left\| (R^*)\int_I \Phi(f_n(t), dt) \right\| < \varepsilon \text{, untuk setiap n.}$$

5) Untuk setiap $\xi \in [a,b]$ dan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta_\xi > 0$ dan bilangan $N > 0$ (hanya bergantung pada ε) sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$\left\| F_{\Phi,n}(u,v) - F_{\Phi,m}(u,v) \right\| < \varepsilon |v-u|$$

asalkan $\xi \in [u,v] \subset (\xi - \delta_\xi, \xi + \delta_\xi)$.

Teorema 3

Jika $\{f_n\}$ barisan fungsi terintegral-R_Φ^* pada [a, b] memenuhi (1) dan (2) maka f terintegral-R_Φ^* pada [a, b] dan

$$(R^*)\int_a^b \Phi(f(t), dt) = \lim_{n\to\infty}(R^*)\int_a^b \Phi(f_n(t), dt)$$

Bukti : Menurut (N4), untuk sebarang bilangan $M > 0$ dan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\eta > 0$ sehingga berlaku

$$\left\| \sum_{i=1}^k \Phi(x_i, I_i) - \sum_{i=1}^k \Phi(y_i, I_i) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

asalkan $\|x_i - y_i\| < \eta$, $\|x_i\| \leq M$ dan $\|y_i\| \leq M$ (i = 1, 2, ..., k) dan $\{I_1, I_2, ..., I_k\}$ partisi bagian di dalam [a, b]. Karena $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada [a, b] maka untuk bilangan $\eta > 0$ ada bilangan $N_1 > 0$ sehingga jika $n \geq N_1$ diperoleh

$$\| f_n(\xi) - f(\xi) \| < \frac{\eta}{2} \text{, untuk setiap } \xi \in [a,b].$$

Hal ini berakibat untuk setiap $m, n \geq N_1$ berlaku

$$\| f_m(\xi) - f_n(\xi) \| \leq \| f_m(\xi) - f(\xi) \| + \| f(\xi) - f_n(\xi) \| < \eta$$

Karena untuk setiap n, f_n terintegral-R_Φ^* pada [a, b] maka ada fungsi positif δ_n pada [a, b] sehingga untuk setiap partisi δ_n-fine $D_n = \{([u, v] ; \xi)\}$ selang [a, b] berlaku

$$\left\| (D_n)\sum \Phi(f_n(\xi), [u,v]) - (R^*)\int_a^b \Phi(f_n(t), dt) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dengan demikian untuk setiap $m, n \geq N_1$ dan partisi δ_n-fine $D_n = \{([u, v] ; \xi)\}$ selang [a, b] dengan $\delta(\xi) = \min\{\delta_m(\xi), \delta_n(\xi)\}$ untuk setiap $\xi \in [a,b]$ berlaku

$$\left\| (R^*)\int_a^b \Phi(f_m(t), dt) - (R^*)\int_a^b \Phi(f_n(t), dt) \right\| < \varepsilon$$

Oleh karena itu $\left\{ (R^*)\int_a^b \Phi(f_n(t), dt) \right\}$ merupakan barisan Cauchy sehingga konvergen, sebut ke $A \in X$ dan ditulis

$$\lim_{n\to\infty}(R^*)\int_a^b \Phi(f_n(t), dt) = A.$$

Hal ini berakibat ada bilangan $N_2 > 0$ sehingga untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$\left\| (R^*)\int_a^b \Phi(f_n(t), dt) - A \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pilih $n \geq maks\{N_1, N_2\}$ (tetap), maka untuk setiap partisi δ_n-fine $D_n = \{([u, v] ; \xi)\}$ selang [a, b] berlaku $\left\| (D)\sum \Phi(f(\xi), [u,v]) - A \right\| < \varepsilon$.

Hal ini menunjukkan bahwa f terintegral R_Φ^* pada [a, b] dan

$$\left(R^*\right)\int_a^b \Phi\left(f(t),dt\right) = \lim_{n\to\infty}\left(R^*\right)\int_a^b \Phi\left(f_n(t),dt\right)$$

Terbukti

Contoh : Diketahui {φ_n} barisan fungsi tangga pada [a, b] dengan $\varphi_n(\xi)$ = c/n untuk setiap $\xi \in I_i$ (I = 1, 2, …, k), maka φ_n terintegral-R_Φ^* pada [a, b] untuk setiap n. selanjutnya akan ditunjukkan {φ_n} konvergen seragam ke fungsi nol φ pada [a, b]. ambil sebarang bilangan ε > 0. pilih bilangan N = (M + 1)/ε dengan $M = maks\left\{\|c_i\|; i=1,2,\ldots,k\right\}$, sehingga untuk setiap $\xi \in [a,b]$ dan $n \geq N$ berlaku

$$\|\varphi_n(\xi)-\varphi(\xi)\| = \left\|\frac{c_i}{n}\right\| \leq \frac{\|c_i\|}{M+1}\varepsilon < \varepsilon .$$

Jadi, {φ_n} konvergen seragam ke fungsi nol pada [a, b] sehingga

$$\left(R^*\right)\int_a^b \Phi(\varphi(t),dt) = \lim_{n\to\infty}\left(R^*\right)\int_a^b \Phi(\varphi_n(t),dt) = \theta$$

b. Kekonvergenan-γ_Φ

Diketahui {f_n} barisan fungsi pada [a, b]. {f_n} dikatakan konvergen-γ terhadap fungsi ukuran Φ atau konvergen-γ_Φ ke fungsi f pada [a, b] jika untuk setiap bilangan
ε > 0 ada bilangan N > 0 sehingga untuk setiap $n \geq N$ ada fungsi positif γ_n pada [a, b]
dan berlaku

$$\left\|(D)\sum\Phi\left(f_n(\xi),dt\right)-(D)\sum\Phi\left(f(\xi),dt\right)\right\| < \varepsilon$$

untuk partisi γ_n-fine D = {([u, v] ; ξ)} selang [a, b].

Contoh : Diketahui fungsi f_n : [0, 1] → X dengan

$$f_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{c}{n}; \xi \in \left(0,\dfrac{1}{n}\right) \\ \theta\ ; \xi \in [0,1] - \left(0,\dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

Akan ditunjukkan {f_n} konvergen-γ_Φ ke fungsi nol f pada [0, 1].
Menurut (N4), untuk setiap bilangan ε > 0 ada bilangan η > 0 sehingga berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^{P}\Phi(s_i,I_i)-\sum_{i=1}^{P}\Phi(t_i,I_i)\right\| < \varepsilon$$

asalkan $\|s_i - t_i\| < \eta$; $\|s_i\| \leq \|c\|$, $\|t_i\| \leq \|c\|$, (i = 1, 2, ..., p) dan {I_1, I_2, ..., I_p} partisi bagian di dalam [0, 1].
Pilih bilangan $N \geq (\|c\|+1)/\eta$, maka untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\|f_n(\xi)-f(\xi)\| \leq \left\|\frac{c}{n}\right\| < \eta, \text{ untuk setiap } \xi \in [0,1].$$

Bentuk fungsi γ_n : [0, 1] → R, dengan $\gamma_n(\xi)$ = ½ untuk setiap $\xi \in [0,1]$, maka untuk setiap partisi γ_n-fine D = {([u, v] ; ξ)} selang [0, 1] berlaku

$$\left\|(D)\sum\Phi\left(f_n(\xi),dt\right)-(D)\sum\Phi\left(f(\xi),dt\right)\right\| < \varepsilon .$$

Untuk menyingkat penulisan, didaftarkan syarat berikut :

6) {f_n) konvergen-γ_Φ ke fungsi f pada [a, b].

Teorema 4 :
Diketahui {f_n} barisan fungsi terintegral-R_Φ^* pada [a, b]. Syarat (6) berlaku jika dan hanya jika f terintegral-R_Φ^* pada [a, b] dan

$$\left(R^*\right)\int_a^b \Phi\left(f(t),dt\right) = \lim_{n\to\infty}\left(R^*\right)\int_a^b \Phi\left(f_n(t),dt\right).$$

Bukti : Syarat perlu : Ambil sebarang bilangan ε > 0. karena {f_n} konvergen-γ_Φ ke f pada [a, b] maka ada bilangan N_1 > 0 sehingga untuk setiap $h,k \geq N_1$ ada fungsi positif γ_h dan γ_k pada [a, b] dan berlaku

$$\left\|(D_j)\sum \Phi\left(f_j(\xi), dt\right) - (D_j)\sum \Phi\left(f(\xi), dt\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

untuk setiap partisi γ_j-fine D_j = {([u, v] ; ξ)} (j = h, k), selang [a, b].

Karena f_k, f_h terintegral-R_Φ^* pada [a, b] maka ada fungsi positif δ_k dan δ_h pada [a, b] sehingga untuk setiap partisi δ_j-fine P_j = {([u, v] ; ξ)} selang [a, b] (j = k, h), berlaku

$$\left\|(P_j)\sum \Phi\left(f_j(\xi), [u,v]\right) - (R^*)\int_a^b \Phi\left(f_j(t), dt\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Ambil sebarang partisi δ-fine D = {([u, v] ; ξ)} selang [a, b] dengan δ(ξ) = min {γ_k(ξ), γ_h(ξ), δ_k(ξ), δ_h(ξ)}, maka untuk setiap $h, k \geq N_1$ berlaku

$$\left\|(R^*)\int_a^b \Phi\left(f_k(\xi), [u,v]\right) - (R^*)\int_a^b \Phi\left(f_h(\xi), [u,v]\right)\right\| < \varepsilon$$

Dengan demikian $\left\{(R^*)\int_a^b \Phi\left(f_n(t), dt\right)\right\}$ merupakan barisan Cauchy sehingga konvergen, sebut ke $A \in X$ dan ditulis $\lim_{n\to\infty}(R^*)\int_a^b \Phi\left(f_n(t), dt\right) = A$.

Hal ini berakibat ada bilangan N_2 > 0 sehingga untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$\left\|(R^*)\int_a^b \Phi\left(f_n(t), dt\right) - A\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pilih $n \geq maks\,\{N_1, N_2\}$ dan bentuk fungsi positif δ pada [a, b] dengan δ(ξ) = min{γ_n(ξ), δ_n(ξ)}, maka untuk setiap partisi δ-fine D = {([u, v] ; ξ)} selang [a, b] berlaku

$$\left\|(D)\sum \Phi\left(f(\xi), [u,v]\right) - A\right\| < \varepsilon .$$

Ini berarti f terintegral-R_Φ^* pada [a, b] dan $(R^*)\int_a^b \Phi\left(f(t), dt\right) = \lim_{n\to\infty}(R^*)\int_a^b \Phi\left(f_n(t), dt\right)$.

Syarat cukup : Ambil sebarang bilangan ε > 0. Karena

$$(R^*)\int_a^b \Phi\left(f(t), dt\right) = \lim_{n\to\infty}(R^*)\int_a^b \Phi\left(f_n(t), dt\right)$$

maka ada bilang N > 0 sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\left\|(R^*)\int_a^b \Phi\left(f_n(t), dt\right) - (R^*)\int_a^b \Phi\left(f(t), dt\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pilih $k \geq N$ dan karena f_k, f terintegral-R_Φ^* pada [a, b] maka ada fungsi positif δ_k dan δ pada [a, b] sehingga berlaku

$$\left\|(D_k)\sum \Phi\left(f_k(\xi), [u,v]\right) - (R^*)\int_a^b \Phi\left(f_k(t), dt\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

untuk setiap partisi δ_k-fine D_h = {([u, v] ; ξ)} selang [a, b] dan

$$\left\|(D_1)\sum \Phi\left(f(\xi), [u,v]\right) - (R^*)\int_a^b \Phi\left(f(t), dt\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

untuk setiap partisi δ-fine D_1 = {([u, v] ; ξ)} selang [a, b].

Ambil sebarang partisi δ-fine D_1 = {([u, v] ; ξ)} selang [a, b] dengan γ_k(ξ) = min {δ_k(ξ), δ(ξ)}, maka

$$\left\|(D)\sum \Phi\left(f_k(\xi), [u,v]\right) - (D)\sum \Phi\left(f(\xi), [u,v]\right)\right\| < \varepsilon$$

Dengan kata lain {f_n) konvergen-γ_Φ ke fungsi f pada [a, b]. **(Terbukti)**

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Syarat cukup yang diperlukan agar fungsi f terintegral non linear Henstock pada selang yang sama adalah:
   a. {f_n} konvergen ke f hampir dimana-mana pada [a, b].
   b. {f_n} konvergen seragam ke f pada [a, b].
   c. Primitif $F_{\Phi,n}$ kontinu mutlak seragam dalam n.
   d. Untuk setiap bilangan ε > 0 ada bilangan δ > 0 sehingga untuk setiap selang I di dalam [a, b] dengan μ(I) < δ, berlaku

$$\left\| \left(R^*\right)\int_I \Phi\left(f_n(t), dt\right) \right\| < \varepsilon \text{, untuk setiap n.}$$

   e. Untuk setiap $\xi \in [a, b]$ dan bilangan ε > 0 ada bilangan δ_ξ > 0 dan bilangan N > 0 (hanya bergantung pada ε) sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$\left\| F_{\Phi,n}(u,v) - F_{\Phi,m}(u,v) \right\| < \varepsilon |v-u|$$

asalkan

$$\xi \in [u,v] \subset \left(\xi - \delta_\xi, \xi + \delta_\xi\right)$$

2. Teorema kekonvergenan yang terkait dengan integral non linear Henstock fungsi bernilai Banach adalah :
   a. Jika {f_n} barisan fungsi terintegral-R_Φ^* pada [a, b] memenuhi (1) dan (2) maka f terintegral-R_Φ^* pada [a, b] dan

$$\left(R^*\right)\int_a^b \Phi\left(f(t), dt\right) = \lim_{n\to\infty} \left(R^*\right)\int_a^b \Phi\left(f_n(t), dt\right)$$

   b. Diketahui {f_n} barisan fungsi terin tegral-R_Φ^* pada [a, b]. Syarat (6) berlaku jika dan hanya jika f terin-tegral-R_Φ^* pada [a, b] dan

$$\left(R^*\right)\int_a^b \Phi\left(f(t), dt\right) = \lim_{n\to\infty} \left(R^*\right)\int_a^b \Phi\left(f_n(t), dt\right)$$

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G. (1994). **A Convergence The-orem for Generalized Rei mann In-tegrals**. Real Analysis Ex change, V. 20, h. 119 -124

Cao, S.S. (1992). **The Henstock for Ba nach-Valued Functions.** South. Asian Bull. Of Math, V. 16, h. 35-40.

Darmawijaya, Yusuf, Indriati, Ch, R, dan Salmah. (2002). **Integral Nonli near Henstock.** Laporan Penelitian, FMI PA-UGM, Yogyakarta

Gordon, R. (1990). **Another Approach to the Controlled Convergence Theo rem.** Real Analysis Exchange, V. 16, h. 306-310

Liao, K.C. (1987). **A Refinement of the Controlled Converage Theorem for Henstock Integrals**. South. Asian Bull. Of Math, V. 11, h. 49-51

Peng Yee, L. (1989). **Lanzhou Lectures on Henstock Integration.** Word Sci-entific Singapore

Soedijono, B. (1993). **The Convergence Theorem of Approximate Integral**, South Asian Bull, of Math, Special Issue, h. 153-162