KOMBINASI METODE NEWTON DENGAN METODE SECANT UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Supriadi Putra*, Defi Arvina AR, M. Imran***

*)Laboratorium Matematika Terapan Jurusan Matematika
**)Alumni Program Studi S_1 Matematika, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
email: sputra@unri.ac.id

ABSTRACT

We discuss a combination of Newton's method and Secant's method to solve a non linear equation of one variable. The same work has been done by Kasturiarachi A.B. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. ***33****(4), 521-527 (2002). Here we prove the order of conver gence of the method for correcting some mistakes in Kasturiarachi's article while deriving error analysis of the method. Comparison among the discussed methods is also given by considering number of iteration and function evaluation.*

Keywords*: Newton's method, Newton-secant Method, Secant's method, Two-step iteration method*

PENDAHULUAN

Menentukan akar dari suatu persamaan nonlinear satu variabel,

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

adalah topik yang selalu dibahas dalam mata kuliah metode numerik, karena masalah ini mencul dari berbagai masalah sains yang memerlukan penyelesaian secara matematik. Metode analitik yang tersedia dalam menyelesaikan masalah nonlinear ini sangat terbatas kemampuannya, maka peneliti mengembangkan metode aproksimasi. Akhir-akhir ini para peneliti mulai melakukan pengembangan metode aproksimasi untuk persamaan nonlinear (1) dengan melakukan aproksi masi dua langkah, yaitu menggabungkan dua metode yang tersedia. [2-4,6,8,9].

Metode Newton adalah metode yang sangat popular untuk mengaproksimasi akar persamaan nonlinear (1). Dalam pene rapannya metode ini memerlukan satu tebakan awal, katakan x_0, dan iterasinya dinyatakan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \qquad (2)$$

Metode ini mensyaratkan bahwa $f'(x_n) \neq 0$, agar metode dapat diterapkan dan konvergen secara kuadratik [1,5,7]. Metode yang tak kalah populernya adalah metode Secant, merupakan metode iterasi yang mengatasi kelemahan metode Newton dengan mengaproksimasi $f'(x_n)$ dengan garis Secant. Metode ini memerlukan dua tebakan awal, katakan x_0 dan x_1 dan formulanya diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad (3)$$

$n = 1,2,3,\ldots.$

Metode Secant konvergen secara super linear [1,5,7].

Ujevic [8] menggabungkan metode bertipe Newton dengan metode yang diturunkan berdasarkan kuadrature yang iterasinya diberikan oleh

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \eta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{4(y_n - x_n) f(x_n)}{3f(x_n) - 2f(y_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dalam hal ini $\eta \in (0,1)$. Untuk keperluan komputasi akan digunakan nilai terbaik untuk $\eta = 0.5$.

Dengan adanya satu tebakan awal, maka penerapan metode Newton memung kinkan pemanfaatkan hasil iterasi ini untuk menjalankan metode Secant. Teknis ini memungkinkan dilakukannya pengga bungan metode Newton dengan metode Secant sebagaimana disajikan oleh Kasturiarachi [4].

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini dilakukan kajian ulang yang terlebih dahulu telah dilakukan oleh Kasturiarachi [4] dengan memperbaiki kesalahan pada penurunan analisis error dari metode yang dikemukakan. Selan jutnya melalui simulasi numerik dengan mengambil beberapa contoh fungsi yang biasa digu nakan oleh peneliti lain sebelumnya, dilakukan uji komputasi yang dalam hal ini menggunakan software Maple 13 pada Laptop Acer Ferrari One dengan processor AMD Athlon X2 bermemori 2GB. Pada akhirnya metode terbaik dianalisa dengan melihat jumlah iterasi, perhitungan orde kekonvergenan dan jumlah fungsi yang dievaluasi pada setiap contoh persamaan nonlinear yang digunakan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Kombinasi Metode Newton dan Metode Secant

Untuk mendapatkan metode baru sebagai hasil kombinasi dari metode Newton dan metode Secant, persamaan (2) dan (3) ini digabungkan pemakaiannya secara bersama-sama dalam bentuk

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)\big(f(x_n) - f(y_n)\big)}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

untuk $n = 0,1,2,\ldots$. Metode ini dinamakan dengan metode iterasi Newton-Secant. Selanjutnya akan dianalisis kekonvergenan dari metode Newton-Secant (5).

2. Analisis Kekonvergenan Metode Newton-Secant

Kasturiarachi [4] telah menyajikan kajian analitis yang menunjukkan bahwa metode yang diberikan persamaan (5), akan konvergen ke akar α sebagaimana disaji-kan oleh Teorema 1 berikut.

Teorema 1

Misalkan $f(a)f(b) < 0$ dan $f \in C^2[a,b]$ dan $f'(x), f''(x)$ bernilai tidak nol dan tidak berubah tanda pada interval $[a,b]$. Ambil $x_0 \in [a,b]$ sebagai tebakan awal aproksimasi, sedemikian hingga $f(x_0) f''(x_0) > 0$. Maka kombinasi metode Newton dengan metode Secant pada persamaan (5) dapat digunakan untuk menghitung akar α dari persamaan $f(x) = 0$ untuk setiap tingkat ketepatan.

Di bawah ini ada beberapa kasus lain, yaitu

- $f(a) < 0,\ f(b) > 0,$ dan

  $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$ pada interval $[a,b]$

- $f(a) > 0,\ f(b) < 0,$ dan

  $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$ pada interval $[a,b]$,

- $f(a) < 0,\ f(b) > 0,$ dan

  $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$ pada interval $[a,b]$,

- $f(a) < 0,\ f(b) < 0,$ dan $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$ pada interval $[a,b]$,
- $f(a) > 0,\ f(b) > 0,\ f^{(n)}(\alpha) = 0$ untuk $n \geq 1$, dan $f''(x) \geq 0$ pada interval $[a,b]$ (akar banyak),
- $f(a) < 0,\ f(b) < 0,\ f^{(n)}(\alpha) = 0$ untuk $n \geq 1$, dan $f''(x) \leq 0$ pada interval $[a,b]$ (akar banyak).

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa metode Newton-Secant mempunyai kekon vergenan kubik sebagaimana disajikan Teorema 2, yang merupakan koreksi terhadap persamaan error yang diberikan oleh Kasturiarachi [4].

Teorema 2

Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dengan $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$ Misalkan $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ kontinu untuk semua x disekitar α. Jika x_0 dipilih pada D dan cukup dekat α, maka $\{x_n\}, n = 0,1,2,\ldots,$ yang dihasilkan metode Newton-Secant (5) konvergen ke akar α adalah dengan kekonvergenan kubik dan memenuhi persamaan error

$$e_{n+1} = C_2^2 e_n^3 + O(e_n^4),$$

Dengan $e_n = x_n - \alpha$

dan $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)},\ j = 1,2,3,\ldots.$

Bukti:

Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0,$ maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0.$ Selanjutnya misalkan $x_n = \alpha + e_n$, dan nyatakan

$$F_i = f^{(i)}(\alpha), \quad i = 1,2,3$$

dan

$$C_j = \frac{F_j}{j!F_1}, \quad j = 2,3.$$

Dengan menggunakan ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ akan diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + F_1 e_n + \frac{F_2}{2!} e_n^2 + \frac{F_3}{3!} e_n^3 + O(e_n^4). \quad (6)$$

Karena $f(\alpha) = 0,$ maka dengan melaku-kan manipulasi aljabar pada persamaan (6) diperoleh

$$f(x_n) = F_1 \left(e_n + \frac{F_2}{2!F_1} e_n^2 + \frac{F_3}{3!F_1} e_n^3 + O(e_n^4) \right)$$

atau

$$f(x_n) = F_1 \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4) \right). \quad (7)$$

Dengan cara yang sama ekspansi Taylor $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, memberikan

$$f'(x_n) = F_1 \left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3) \right). \quad (8)$$

Apabila persamaan (7) dibagi dengan persamaan (8), maka sesudah disederhana-kan diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4) \right)}{\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3) \right)}. \quad (9)$$

Selanjutnya dengan menggunakan identitas geometri

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4), \qquad (10)$$

persamaan (9) dapat ditulis menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2 e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (11)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (11) ke bagian pertama persamaan (5), sesudah disederhanakan diperoleh

$$y_n = \alpha + C_2 e_n^2 + 2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (12)$$

Selanjutnya ekspansi Taylor dari $f(y_n)$ disekitar $y_n = \alpha$, dengan mengingat bahwa $f(\alpha) = 0,$ maka diperoleh

$$f(y_n) = F_1\left(C_2 e_n^2 + 2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right). \qquad (13)$$

Jika persamaan (7) dikurangkan dengan persamaan (13), maka diperoleh:

$$f(x_n) - f(y_n) = F_1 e_n\left(1 + (2C_2^2 - C_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right). \qquad (14)$$

Dengan membagi persamaan (7) dengan persamaan (14), dan memperhatikan identitas (10), diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(y_n)} = 1 + C_2 e_n + (2C_3 - 2C_2^2)e_n^2 + (3C_2^3 + 4C_4 - 6C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (15)$$

Selanjutnya dengan mengalikan persamaan (11) dan (15), kemudian hasil yang diperoleh disederhanakan didapat

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(y_n)} = e_n - C_2^2 e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (16)$$

Selanjutnya dengan mengingat bahwa $x_{n+1} - \alpha = e_{n+1}$, dan mensubstitusikan persamaan (16) kebagian kedua persamaan (5) diperoleh

$$e_{n+1} = C_2^2 e_n^3 + O(e_n^4),$$

maka Teorema 2 terbukti. ■

3. Simulasi Numerik

Pada bagian ini dilakukan komputasi terhadap persamaan nonlinear yang sebelumnya juga digunakan oleh Weerakoon [9] untuk membandingkan ketiga metode yang telah dibahas: metode Newton (**MN**), metode yang dikemukakan oleh Nenad Ujevic (**MUj**) dan metode Newton-Secant (**MNS**). Persamaan non-linear tersebut adalah :

EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

EMBED Equation.DSMT4

Pada setiap persamaan liniear akan dilakukan komputasi dengan menggunakan metode Newton, metode Ujevic dan metode Newton Secant untuk mendapatkan jumlah iterasi, akar pendekatan, Orde komputasi (COC) dan jumlah evaluasi fungsi. Rumus COC yang digunakan sama seperti yang digunakan dalam [9] adalah

$$COC = \frac{\ln(|x_n - \alpha| / |x_{n-1} - \alpha|)}{\ln(|x_{n-1} - \alpha| / |x_{n-2} - \alpha|)}, \quad n \geq 2$$

Kriteria perberhentian komputasi adalah apabila nilai $f'(x_n), |f(x_n)|$, dan $|x_n - x_{n-1}|$ lebih kecil atau sama dengan toleransi yang digunakan yaitu sebesar 2.22×10^{-16}.

Pada Tabel 1a-c diberikan contoh hasil komputasi yang dilakukan pada persamaan nonlinear $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dengan nilai awal $x_0 = 1.0$.

Dengan cara yang sama untuk semua persamaan nonlinear dan nilai awal lainnya dilakukan komputasi dan hasilnya dirangkum sebagaimana yang diberikan oleh Tabel 2 pada halaman berikut.

Tabel 1a. Contoh Hasil Komputasi Metode Newton (MN) untuk $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dengan nilai awal $x_0 = 1.0$

N	x_0	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	COC
1	1.4545454545454545	1.54019534e+00	4.54545455e-01	
2	1.3689004010695187	6.07196886e-02	8.56450535e-02	
3	1.3652366002021159	1.08770610e-04	3.66380087e-03	2.2664
4	1.3652300134353666	3.51236101e-10	6.58676675e-06	1.9810
5	1.3652300134140968	3.66251333e-21	2.12697640e-11	1.9996

NOFE = 10 (diperoleh dari jumlah iterasi (5) dikalikan dengan banyaknya evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, yaitu 2)

Tabel 1b. Contoh Hasil Komputasi Metode Ujevic (MUj) untuk $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dengan nilai awal $x_0 = 1.0$

N	x_0	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	COC
1	1.4229660054181596	9.80596472e-01	4.22966005e-01	
2	1.3664230572011654	1.97127329e-02	5.65429482e-02	
3	1.3652305364709694	8.63744909e-06	1.19252073e-03	2.1030
4	1.3652300134141974	1.66116532e-12	5.23056772e-07	1.9932
5	1.3652300134140968	6.14423604e-26	1.00594996e-13	1.9999

NOFE = 15 (diperoleh dari jumlah iterasi (5) dikalikan dengan banyaknya evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, yaitu 3)

Tabel 1c. Contoh Hasil Komputasi Metode Newton-Secant (MNS) untuk $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dengan nilai awal $x_0 = 1.0$

N	x_0	$\lvert f(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	COC
1	1.3475014359563469	2.90220151e-01	3.47501436e-01	
2	1.3652286477425863	2.25518636e-05	1.77272118e-02	
3	1.3652300134140968	1.01090575e-17	1.36567151e-06	3.1306

NOFE = 9 (diperoleh dari jumlah iterasi (3) dikalikan dengan banyaknya evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, yaitu 3).

Tabel 2. Perbandingan Hasil Komputasi Tiga Metode yang Digunakan

Persamaan Nonlinear	x_0	n			COC			NOFE		
		MN	MUj	MNS	MN	MUj	MNS	MN	MUj	MNS
$f_1(x)=0$	-0.50	97	8	10	1.9994	1.9989	2.9629	194	24	30
	-0.30	54	19	4	2.0000	1.9997	2.8397	108	57	12
	1.00	5	5	3	1.9996	1.9999	3.1306	10	15	9
	2.00	5	5	4	1.9989	1.9997	2.9957	10	15	12
$f_2(x)=0$	1.00	6	5	4	1.9998	1.9987	3.0318	12	15	12
	3.00	6	6	4	1.9995	1.9999	2.9410	12	18	12
$f_3(x)=0$	0.50	6	6	4	2.0000	2.0001	3.0000	12	18	12
	1.50	6	6	4	2.0000	2.0000	3.0000	12	18	12
$f_4(x)=0$	2.0	5	5	3	2.0004	2.0008	3.4019	10	15	9
	3.0	6	6	4	2.0008	2.0005	2.6747	12	18	12
$f_5(x)=0$	-0.30	6	5	4	2.0000	1.9982	3.0492	12	15	12
	1.00	4	4	3	1.9980	1.9988	2.9296	8	12	9
	1.70	5	4		2.0000	1.9928	2.5911	10	12	0
$f_6(x)=0$	2.50	6	5	4	1.9999	1.9982	2.9833	12	15	12
	3.50	7	7	5	1.9995	2.0000	2.9901	14	21	15
$f_7(x)=0$	1.50	6	5	4	1.9999	1.9993	3.0171	12	15	12
	3.00	6	5	4	2.0000	1.9993	2.9918	12	15	12
$f_8(x)=0$	-1.00	6	5	4	2.0000	2.0001	3.0015	12	15	12
	-2.00	8	8	5	1.9999	2.0000	2.9748	16	24	15
$f_9(x)=0$	3.25	8	8	6	1.9988	2.0000	2.9976	16	24	18
	3.50	12	11	8	1.9999	1.9999	2.9936	24	33	24
	10.0	146	130	92	2.0000	1.9997	2.9638	292	390	276

Keterangan :

MN = Metode Newton
MUj = Metode yang dikemukakan Ujevic
MNS = Metode Newton-Secant
COC = Computational Order of Convergence
NOFE = Number of Function Evaluations
NA = Not Applicable
n = banyak iterasi untuk mengaproksimasi akar dengan 16 nilai desimal

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil komputasi yang dilakukan seperti yang disajikan pada Tabel 2, secara umum terlihat bahwa metode Newton-Secant lebih unggul dibandingkan dengan metode Newton dan metode Nenad Ujevic. Kenyataan ini dapat dilihat dari jumlah iterasi (n) yang lebih sedikit, nilai perhitungan orde kekonvergenan (COC) yang lebih tinggi dan jumlah evaluasi fungsi (NOFE) yang lebih kecil.

Kombinasi metode Newton dan Secant memerlukan 3 evaluasi fungsi per iterasi dan berorde tiga. Akan tetapi dengan menggunakan definisi indeks efisiensi [7], kombinasi metode Newton dan Secant mempunyai indeks efisiensi $3^{1/3} = 1.4422$ yang lebih baik dari indeks efisiensi Metode Newton $2^{1/2} = 1.4142$ meskipun Metode Newton hanya memerlukan 2 evaluasi fungsi per iterasi.

DAFTAR PUSTAKA

Conte, S.D., de Boor, C. (1980). **Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach, Third Edition**. McGraw-Hill Book Company: U.S.A.

Chen M., Chang T. (2008). **Higher Order Two-Step Methods for Root Finding**, Appl. Comp. Math. 7, No.2, 206-213.

Feng J. (2009). **A New Two-step Method for Solving Nonlinear Equations**. Int. J. Nat. Sci. 8(1). 40-44.

Kasturiarachi A.B. (2002). **Leaf Frog Newton's Method**. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 33(4), 521-527.

Nakamura, S. (1993). **Applied Numerical Methods in C**. Prentice Hall: Singapore.

Noor M.A. Ahmad, F., Javeed, S. (2006). **Two-step Iterative Methods for Nonlinear Equations**, Appl. Math. and Comp. 181 1068-1075.

Traub, J. F. (1964). **Iterative Methods for the Solution of Equations**. Prentice Hall: New York

Ujevic, N. (2006). **A Method for Solving Nonlinear Equations.** Appl. Math. Comp. 174: 1416-1426

Weerakoon, S., Fernando, T.G.I. (2000). **A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence**. Appl. Math. Letter. 13, 87-93